ESCP 2024

Exercice 1 –

1. a) La fonction h est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la forme e^u, avec $u(t) = -\sqrt{t}$.
Comme $u'(t) = -\dfrac{1}{2\sqrt{t}}$, alors

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad h'(t) = u'(t)\,\mathrm{e}^{u(t)} = -\frac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}}.$$

b) Soit $y \geqslant 0$. Sur l'intervalle $\left]0, y\right] \subset \mathbb{R}_+^*$, $\quad g(t) = \dfrac{\mathrm{e}^{-\sqrt{t}}}{2\sqrt{t}} = -h'(t)$.
Ainsi une primitive de g est donnée par $-h$ et je peux calculer l'intégrale :

$$\int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t = \Big[-h(t)\Big]_0^y = -h(y) + h(0) = \mathrm{e}^{-\sqrt{0}} - \mathrm{e}^{-\sqrt{y}} = 1 - \mathrm{e}^{-\sqrt{y}}.$$

2. Je vérifie les trois points de la définition d'une densité de probabilité :
   - Pour $t > 0$, $f(t) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \leqslant 0$, $f(t) = \mathrm{e}^t \geqslant 0$ car une exponentielle est toujours positive. Donc $\forall t \in \mathbb{R}$, $f(t) \geqslant 0$.
   - Sur $\left]-\infty, 0\right]$, f est continue car la fonction exponentielle est continue
   et sur $\left]0, +\infty\right[$, f est continue car constante.
   Donc f admet au plus un point de discontinuité (en 0).
   - Il me reste à calculer l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$, que je découpe en deux parties :
     - ▷ $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.
     - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$. Je fixe $m \leqslant 0$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_m^0 f(t)\,\mathrm{d}t$:

$$\int_m^0 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_m^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t = \Big[\mathrm{e}^t\Big]_m^0 = \mathrm{e}^0 - \mathrm{e}^m = 1 - \mathrm{e}^m.$$

Alors en faisant tendre m vers $-\infty$, comme $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$, alors $\displaystyle\lim_{m\to-\infty} 1 - \mathrm{e}^m = 1$.
Donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

Finalement, grâce à la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1.$$

Comme f vérifie les trois conditions de la définition, alors f est bien une densité de probabilité.

3. a) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction de répartition de X est donnée par $F_X(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t$.
Ainsi pour $x \geqslant 0$, grâce à la relation de Chasles,

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 f(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^x f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^0 \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t + \int_0^x 0\,\mathrm{d}t = 1 + 0 = 1,$$

grâce au calcul effectué à la question précédente.

b) Pour $x<0$, grâce à la même formule, j'obtiens que $F_X(x)=\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t=\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t$.
En utilisant la même méthode, je fixe $m\leqslant 0$ et calcule l'intégrale $\int_m^x \mathrm{e}^t\,\mathrm{d}t=\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^m$.
Alors en faisant tendre m vers $-\infty$, j'obtiens que pour $x<0$, $\quad F_X(x)=\lim\limits_{m\to-\infty}\mathrm{e}^x-\mathrm{e}^m=\mathrm{e}^x$.

4. a) Par définition de la fonction de répartition, pour tout $x\in\mathbb{R}$,

$$G(x)=P\big(-X\leqslant x\big)=P\big(X\geqslant -x\big)=1-P\big(X\leqslant -x\big)=1-F_X(-x).$$

b) Grâce à la question précédente et en réutilisant les expressions trouvées précédemment, j'obtiens que

- pour $x\leqslant 0$, $\quad$ *i.e.* $-x\geqslant 0$, $\quad G(x)=1-F_X(-x)=1-1=0$,
- pour $x>0$, $\quad$ *i.e.* $-x<0$, $\quad G(x)=1-F_X(-x)=1-\mathrm{e}^{-x}$.

Je retrouve ici la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$, donc $-X$ suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda=1$.

c) Comme $-X$ suit une loi exponentielle, alors elle admet une espérance et une variance et

$$E(-X)=\frac{1}{\lambda}=\frac{1}{1}=1 \quad \text{et} \quad V(-X)=\frac{1}{\lambda^2}=\frac{1}{1^2}=1.$$

Puis par linéarité de l'espérance,

$$E(X)=-E(-X)=-1 \quad \text{et} \quad V(X)=(-1)^2V(-X)=1\times 1=1.$$

5. a) Grâce à la formule de König-Huygens, je sais que $V(X)=E\big(X^2\big)-E(X)^2$. Ainsi

$$E(Y)=E\big(X^2\big)=V(X)+E(X)^2=1+(-1)^2=1+1=2.$$

b) J'opère cette fois encore par disjonction de cas :

- pour $y<0$, $\quad F_Y(y)=P\big(X^2\leqslant y\big)=0$, $\quad$ puisqu'un carré n'est jamais négatif.
- pour $y\geqslant 0$, $\quad F_Y(y)=P\big(X^2\leqslant y\big)=P\big(-X\leqslant\sqrt{y}\big)=G\big(\sqrt{y}\big)=1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}}$.
  J'ai fait le choix de prendre la variable aléatoire $-X$ qui est à valeurs positives et dont on connaît aussi la fonction de répartition plutôt que de passer par X et de devoir retourner les inégalités.

Finalement, j'ai bien montré que

$$\forall y\in\mathbb{R},\quad F_Y(y)=\begin{cases}0 & \text{si } y<0,\\ 1-\mathrm{e}^{-\sqrt{y}} & \text{si } y\geqslant 0.\end{cases}$$

c) Je remarque que pour $y\geqslant 0$, la fonction de répartition F_Y coïncide avec l'intégrale $\int_0^y g(t)\,\mathrm{d}t$ calculée à la question **1.b)**. Comme la fonction g est aussi nulle sur l'intervalle $\big]-\infty,0\big[$, alors j'en déduis que Y est une variable à densité puisque la fonction g en est une densité.

Exercice 2 –

1. a) Je calcule l'expression A^2-8A pour identifier la constante a, en commençant par le produit matriciel $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9+1+2 & 3+3+2 & 3+1+4 \\ 3+3+2 & 1+9+2 & 1+3+4 \\ 6+2+8 & 2+6+8 & 2+2+16 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix},$$

$$A^2-8A = \begin{pmatrix} 12 & 8 & 8 \\ 8 & 12 & 8 \\ 16 & 16 & 20 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -24 & -8 & -8 \\ -8 & -24 & -8 \\ -16 & -16 & -32 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -12 & 0 & 0 \\ 0 & -12 & 0 \\ 0 & 0 & -12 \end{pmatrix} = -12I.$$

Finalement j'obtiens que $A^2-8A = aI$ pour $a = -12$.

b) D'après la question précédente,

$$A^2-8A = -12I \iff A\big(A-8I\big) = -12I \iff A \times \left(-\frac{1}{12}\big(A-8I\big)\right) = I.$$

Ainsi la matrice A est inversible est son inverse est donnée par $A^{-1} = \dfrac{1}{12}\big(8I-A\big)$.

c) Toujours d'après la question **1.a)**, je peux trouver un polynôme annulateur de la matrice A. Alors les valeurs propres de la matrice seront parmi les racines de ce polynôme annulateur.

$$A^2-8A = -12I \iff A^2-8A+12I = 0$$

donc $x^2-8x+12$ est un polynôme annulateur de A.
Son discriminant est donné par $\Delta = (-8)^2-4\times1\times12 = 64-48 = 16 > 0$.
Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-8)-\sqrt{16}}{2\times1} = \frac{8-4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8+4}{2} = 6.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour A sont 2 et 6.

2. a) Je pose $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix}$ et je résous l'équation $AX = 6X$ grâce au système équivalent :

$$\begin{aligned} AX = 6X &\iff \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} = 6 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcrcl} 3x & + & y & + & 2 & = & 6x \\ x & + & 3y & + & 2 & = & 6y \\ 2x & + & 2y & + & 8 & = & 12 \end{array}\right. \\ &\iff \left\{\begin{array}{rcrcl} -3x & + & y & = & -2 \\ x & - & 3y & = & -2 \\ 2x & + & 2y & = & 4 \end{array}\right. \end{aligned}$$

En ajoutant les trois équations, j'obtiens $0 = 0$ ce qui signifie que la première équation est une conséquence des deux suivantes. Je m'intéresse alors à la troisième équation, où tous les coefficients sont pairs :

$$2x+2y = 4 \iff x+y = 2 \iff x = 2-y.$$

En injectant cette expression de x dans la deuxième équation, j'obtiens alors

$$2-y-3y = -2 \iff 4 = 4y \iff y = 1.$$

J'en déduis que $x = 2 - 1 = 1$. Une solution de l'équation $AX = 6X$ est donc donnée par

$$X = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule les deux produits matriciels :

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-3 \\ 2-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$A\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-1 \\ 1-1 \\ 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

c) D'après la question **2.a)**, comme l'équation $AX = 6X$ admet une solution non nulle, alors 6 est bien une valeur propre de la matrice A.
Dans la question **2.b)**,l'énoncé exhibe deux matrices colonnes qui s'avèrent être deux solutions non nulles de l'équation $AX = 2X$. Donc 2 est aussi valeur propre de la matrice A.
Et d'après la question **1.c)**, il ne peut pas y en avoir d'autres.

3. a) Je calcule le produit matriciel $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -3 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+2 & 1-3+2 & 1+1-2 \\ 1-1 & 1+3 & 1-1 \\ 2-2 & 2-2 & 2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

Finalement j'obtiens que $PQ = 4I$, *i.e.* $P \times \left(\frac{1}{4}Q\right) = I$.
Donc la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \dfrac{1}{4}Q$.

b) Je calcule les produits matriciels $A \times P$ et $P \times D$:

$$AP = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+1+2 & 3-1 & 3-1 \\ 1+3+2 & 1-3 & 1-1 \\ 2+2+8 & 2-2 & 2-4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$PD = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & 0 \\ 12 & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

Je trouve le même résultat donc $AP = PD$. Comme la matrice P est inversible, j'en déduis que $A = PDP^{-1}$, avec D diagonale et P inversible : la matrice A est donc diagonalisable.

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.
Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.
Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nIDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

d) La dernière colonne de A^n est le produit de cette matrice avec la matrice colonne $\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$.
Et d'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.
Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad D^n = \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}$.
Et la dernière colonne de A est donnée par le produit :

$$\begin{aligned}
PD^nP^{-1} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} &= \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} \times \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -3 & 1\\2 & 2 & -2\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n & 0 & 0\\0 & 2^n & 0\\0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\1 & -1 & 0\\2 & 0 & -1\end{pmatrix} \times \begin{pmatrix}6^n\\2^n\\-2 \times 2^n\end{pmatrix}\\
&= \frac{1}{4}\begin{pmatrix}6^n + 2^n - 2 \times 2^n\\6^n - 2^n\\2 \times 6^n + 2 \times 2^n\end{pmatrix} = \frac{2^n}{4}\begin{pmatrix}3^n + 1 - 2\\3^n - 1\\2 \times 3^n + 2\end{pmatrix} = 2^{n-2}\begin{pmatrix}3^n - 1\\3^n - 1\\2 \times \left(3^n + 1\right)\end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Je retrouve bien la dernière colonne de la matrice A^n annoncée par l'énoncé.

4. a) La matrice colonne X_1 contient les trois probabilités initiales c_1, p_1 et d_1.
Or l'énoncé affirme que le premier jour, Lucile lit un livre de dinosaures.
Ainsi $d_1 = 1$ et $c_1 = p_1 = 0$ et finalement

$$X_1 = \begin{pmatrix}c_1\\p_1\\d_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{C_n, P_n, D_n\}$ forme un système complet d'événements, alors d'après la formule des probabilités totales, et grâce aux probabilités conditionnelles de l'énoncé,

$$\begin{aligned}
P\big(C_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap C_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap C_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap C_{n+1}\big)\\
&= P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(C_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(C_{n+1}),\\
\textit{i.e.} \qquad c_{n+1} &= c_n \times \frac{1}{2} + p_n \times \frac{1}{6} + d_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \big(3c_n + p_n + d_n\big),\\
P\big(P_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap P_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap P_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap P_{n+1}\big)\\
&= P(C_n) \times P_{C_n}(P_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(P_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(P_{n+1}),\\
\textit{i.e.} \qquad p_{n+1} &= c_n \times \frac{1}{6} + p_n \times \frac{1}{2} + d_n \times \frac{1}{6} = \frac{1}{6} \times \big(c_n + 3p_n + d_n\big),\\
\textit{et} \qquad P\big(D_{n+1}\big) &= P\big(C_n \cap D_{n+1}\big) + P\big(P_n \cap D_{n+1}\big) + P\big(D_n \cap D_{n+1}\big)\\
&= P(C_n) \times P_{C_n}(D_{n+1}) + P(P_n) \times P_{P_n}(D_{n+1}) + P(D_n) \times P_{D_n}(D_{n+1}),\\
\textit{i.e.} \qquad d_{n+1} &= c_n \times \frac{1}{3} + p_n \times \frac{1}{3} + d_n \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6} \times \big(2c_n + 2p_n + 4d_n\big).
\end{aligned}$$

Puis en calculant le produit matriciel AX_n, je retrouve bien les expressions obtenues pour c_{n+1}, p_{n+1} et d_{n+1} :

$$\frac{1}{6}AX_n = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} c_n \\ p_n \\ d_n \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \times \begin{pmatrix} 3c_n + p_n + d_n \\ c_n + 3p_n + d_n \\ 2c_n + 2p_n + 4d_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{n+1} \\ p_{n+1} \\ d_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad X_{n+1} = \dfrac{1}{6}AX_n$.

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad X_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\frac{1}{6^{1-1}}A^{1-1}X_1 = \frac{1}{6^0}A^0X_1 = 1 \times I \times X_1 = X_1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\quad X_n = \dfrac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1$. Or

$$X_{n+1} = \frac{1}{6}AX_n = \frac{1}{6}A \times \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1 = \frac{1}{6^n}A^nX_1.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = \frac{1}{6^{n-1}}A^{n-1}X_1.$$

d) À la question **3.d)**, j'ai calculé la dernière colonne de la matrice A^n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Il s'agit en réalité du produit A^nX_1. En appliquant à $n-1$, j'obtiens alors que

$$A^{n-1}X_1 = 2^{n-3}\begin{pmatrix} 3^{n-1} - 1 \\ 3^{n-1} - 1 \\ 2 \times \left(3^{n-1} + 1\right) \end{pmatrix}.$$

Puis en me limitant au dernier coefficient correspondant à d_n, j'obtiens alors pour $n \in \mathbb{N}^*$,

$$d_n = \frac{1}{6^{n-1}} \times 2^{n-3} \times 2 \times \left(3^{n-1} + 1\right) = \frac{2^{n-2} \times 3^{n-1}}{6^{n-1}} \times \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right) = \frac{1}{2} \times \left(1 + \frac{1}{3^{n-1}}\right).$$

Enfin comme $\dfrac{1}{3^{n-1}} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ et que $\dfrac{1}{3} \in \left]-1, 1\right[$, alors $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{3^{n-1}} = 0$
et par opérations sur les limites,

$$\lim_{n \to +\infty} d_n = \frac{1}{2} \times (1 + 0) = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 –

Première version

1. a) S'il y a $n = 2N$ billes dans l'urne, il y en a en particulier un nombre pair et exactement la moitié d'entre elles sont numérotées avec un nombre pair, c'est-à-dire N billes : il s'agit de tous les numéros de la forme $2k$ pour k allant de 1 à N.

   b) Pour X, il s'agit d'un tirage équiprobable dans une urne contenant $n = 2N$ billes indiscernables au toucher et numérotées de 1 à n. Il s'agit d'une loi uniforme sur l'intervalle d'entiers $[\![1, n]\!]$.
   Pour Y, le support se limite à $\{0, 1\}$ selon la parité du numéro de la seconde bille. Il s'agit d'une loi de Bernoulli et comme il y a autant de numéros pairs que de numéros impairs, le paramètre est $p = \dfrac{1}{2}$.
   D'après les formules des espérances et variances des lois uniformes et de Bernoulli,

$$E(X) = \frac{n+1}{2} = \frac{2N+1}{2} = N + \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(X) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4N^2-1}{12},$$
$$E(Y) = p = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad V(Y) = p(1-p) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

2. Le programme simule bien une loi uniforme pour X et une loi de Bernoulli pour Y, il me suffit alors de renvoyer la somme de X et de Y :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
def jeu_1(N):
    n=2*N
    X=rd.randint(1,n+1)
    Y=rd.randint(0,2)
    return X+Y
```

3. À l'issue du premier tirage, la bille tirée est remise dans l'urne. Ainsi le résultat du premier tirage n'influe pas sur la seconde expérience : les deux variables aléatoires X et Y sont bien indépendantes.

4. Les supports respectifs des variables aléatoires sont $X(\Omega) = [\![1, n]\!]$ et $Y(\Omega) = \{0, 1\}$.
   Toutes les valeurs entre 1 et n peuvent être obtenues à l'issue du premier tirage et l'on y ajoute 0 ou 1 à l'issue du second tirage. Ainsi les valeurs prises par la variable aléatoire $X + Y$ sont tous les entiers compris entre 1 et $n + 1$, *i.e.* $\big(X + Y\big)(\Omega) = [\![1, n+1]\!]$.

5. a) Comme la valeur de X est nécessairement supérieure à 1, alors $X + Y = 1$ si et seulement si $X = 1$ et $Y = 0$. Puis par indépendance des variables aléatoires X et Y,

$$P(X + Y = 1) = P(X = 1) \times P(Y = 0) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}.$$

   De la même manière, comme X est nécessairement inférieur à n, alors $X + Y = n + 1$ si et seulement si $X = n$ et $Y = 1$. Puis par indépendance des variables aléatoires X et Y,

$$P(X + Y = n+1) = P(X = n) \times P(Y = 1) = \frac{1}{n} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2n}.$$

   b) Soit $k \in [\![2, n]\!]$. Un système complet d'événements est donné par $\big\{[Y = 0], [Y = 1]\big\}$ et par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X + Y = k) &= P\big([Y = 0] \cap [X + Y = k]\big) + P\big([Y = 1] \cap [X + Y = k]\big) \\ &= P\big([Y = 0] \cap [X = k]\big) + P\big([Y = 1] \cap [X = k-1]\big) \\ &= P(Y = 0) \times P(X = k) + P(Y = 1) \times P(X = k) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{n} = \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

c) D'après les questions précédentes,

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n+1} P(X+Y=k) &= P(X+Y=1)+\sum_{k=2}^{n} P(X+Y=k)+P(X+Y=N+1)\\ &= \frac{1}{2n}+\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{n}+\frac{1}{2n} = 2\times\frac{1}{2n}+(n-1)\times\frac{1}{n} = n\times\frac{1}{n} = 1.\end{aligned}$$

6. a) Par linéarité de l'espérance et d'après la question **1.b)**,

$$E\big(X+Y\big) = E(X)+E(Y) = N+\frac{1}{2}+\frac{1}{2} = N+1.$$

Il s'agit de la valeur moyenne obtenue au jeu sur un grand nombre de répétitions.

b) Le programme calcule la moyenne des résultats obtenus lors de 1000 répétitions du jeu. On exécute `simulation(4)`, ce qui signifie que $N=4$ et qu'il y a $2\times 4 = 8$ billes dans l'urne. D'après la question précédente, pour $N=4$, l'espérance vaut $E(X+Y) = N+1 = 4+1 = 5$. `Python` renvoie `4.939`, qui est bien une valeur proche de 5, calculée grâce aux 1000 réalisations simulées de l'expérience.

Seconde version

1. a) Cette fois, la bille tirée au premier tirage n'est pas remise dans l'urne. Au départ, il y a dans l'urne N billes avec un numéro pair et N billes avec un numéro impair.
Si X est paire, c'est-à-dire que la bille tirée, et donc retirée de l'urne, est paire, alors il reste dans l'urne $2N-1$ billes dont N sont impaires. Ainsi $P_{[X \text{ paire}]}(Y=1) = \dfrac{N}{2N-1}$.
Si X est impaire, c'est-à-dire que la bille tirée, et donc retirée de l'urne, est impaire, alors il reste dans l'urne $2N-1$ billes dont $N-1$ sont impaires. Ainsi $P_{[X \text{ impaire}]}(Y=1) = \dfrac{N-1}{2N-1}$.

b) Comme $\big\{[X \text{ paire}], [X \text{ impaire}]\big\}$ forme un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}P(Y=1) &= P\big([X \text{ paire}]\cap[Y=1]\big)+P\big([X \text{ impaire}]\cap[Y=1]\big)\\ &= P(X \text{ paire})\times P_{[X \text{ paire}]}(Y=1)+P(X \text{ impaire})\times P_{[X \text{ impaire}]}(Y=1)\\ &= \frac{1}{2}\times\frac{N}{2N-1}+\frac{1}{2}\times\frac{N-1}{2N-1} = \frac{N+N-1}{2(2N-1)} = \frac{2N-1}{2(2N-1)} = \frac{1}{2}.\end{aligned}$$

c) Comme dans le premier jeu, le support de Y est $\{0,1\}$. La probabilité du succès $P(Y=1)$ est elle aussi inchangée. Donc Y suit toujours une loi de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$.

2. a) D'après la formule des probabilités conditionnelles, comme 1 est impair,

$$P\big([X=1]\cap[Y=1]\big) = P(X=1)\times P_{[X=1]}(Y=1) = \frac{1}{2N}\times\frac{N-1}{2N-1} = \frac{N-1}{2N(2N-1)}.$$

b) Si les deux variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors $P\big([X=1]\cap[Y=1]\big)$ serait égale au produit $P(X=1)\times P(Y=1)$. Or

$$P(X=1)\times P(Y=1) = \frac{1}{2N}\times\frac{1}{2} = \frac{1}{4N} \neq \frac{N-1}{2N(2N-1)} = P\big([X=1]\cap[Y=1]\big).$$

Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.

3. Pour savoir quelle version du jeu permet d'obtenir le plus de points en moyenne, il me faut comparer les espérances. Dans les deux versions, pour le premier tirage rien ne change. Donc l'espérance est identique. Pour le second tirage, l'expérience change puisque la première bille tirée n'est pas remise. Cependant la réponse obtenue à la question **1.c)** me permet de conclure que la loi de Y ne change pas. Donc l'espérance de Y n'est pas modifiée non plus. Par linéarité, l'espérance de la somme $X+Y$ reste inchangée et donc les deux versions du jeu possèdent le même gain moyen : il n'y a pas de version favorable au joueur.

Exercice 4 –

1. a) Grâce à l'énoncé, je sais que $v_1 = 1$ et $v_2 = 1$, et par la relation de récurrence,

$$(1+1)v_3 - (2\times 1+1)v_2 + 1\times v_1 = 0 \iff 2v_3 - 3 + 1 = 0 \iff v_3 = \frac{3-1}{2} = 1,$$
$$(2+1)v_4 - (2\times 2+1)v_3 + 2\times v_2 = 0 \iff 3v_4 - 5 + 2 = 0 \iff v_4 = \frac{5-2}{3} = 1.$$

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété : $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $v_1 = 1$ et $v_2 = 1$, d'après l'énoncé. Ainsi $\mathcal{P}(1)$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}(n)$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}(n+1)$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $v_n = 1$ et $v_{n+1} = 1$. Or par la relation de récurrence,

$$(n+1)v_{n+2} - (2n+1)v_{n+1} + nv_n = 0 \iff (n+1)v_{n+2} - (2n+1) + n = 0$$
$$\iff v_{n+2} = \frac{2n+1-n}{n+1} = \frac{n+1}{n+1} = 1.$$

Donc $v_{n+1} = 1$ et $v_{n+2} = 1$. Finalement $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = 1 \quad \text{et} \quad v_{n+1} = 1.$$

c) i. Soit $N \in \mathbb{N}^*$.

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=1}^{2N} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k}$$

Cette somme contient N termes et pour tout $k \leqslant 2N$, $\frac{1}{k} \geqslant \frac{1}{2N}$.
Ainsi en sommant cette inégalité, il vient

$$S_{2N} - S_N = \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{k} \geqslant \sum_{k=N+1}^{2N} \frac{1}{2N} = N \times \frac{1}{2N} = \frac{1}{2}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $S_{2N} - S_N \geqslant \frac{1}{2}$.

ii. Je calcule la différence entre deux termes consécutifs de la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$: pour $N \in \mathbb{N}^*$,

$$S_{N+1} - S_N = \sum_{k=1}^{N+1} \frac{1}{k} - \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} = \frac{1}{N+1} \geqslant 0.$$

Finalement $\forall N \in \mathbb{N}^*$, $S_{N+1} - S_N \geqslant 0 \iff S_{N+1} \geqslant S_N$ et la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ est croissante.

D'après le théorème de la limite monotone, il n'existe que deux possibilités pour la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$: ou bien la suite est majorée et elle converge, ou bien elle diverge vers $+\infty$.

Or si la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ converge vers une limite finie que je note ℓ, alors par unicité de la limite, $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = \ell$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} S_{2N} = \ell$. Puis en passant à la limite dans l'expression obtenue à la question précédente, comme pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $S_{2N} - S_N \geqslant \frac{1}{2}$, alors

$$0 = \ell - \ell \geqslant \frac{1}{2}.$$

C'est impossible. Par l'absurde, j'en déduis donc que la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ ne converge pas vers une limite finie et donc que $\lim\limits_{N\to+\infty} S_N = +\infty$.

iii. D'après la question **1.b)**, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = 1$. La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est donc constante et la série de terme général $\dfrac{1}{nv_n} = \dfrac{1}{n}$ est la série harmonique, dont S_N est la somme partielle des N premiers termes pour tout $N \in \mathbb{N}^*$. Or la suite $(S_N)_{N\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$, donc la série de terme général $\dfrac{1}{nv_n}$ diverge aussi. Dès lors pour tout réel positif α_v, la série de terme général $P(X_v = n) = \dfrac{\alpha_v}{nv_n}$ diverge et on ne peut définir ainsi une variable aléatoire X_v. Il faudrait pour cela que la somme des probabilités soit égale à 1, donc en particulier, que la série converge.

2. Grâce à l'énoncé, je sais que $u_1 = 1$ et $u_2 = 1$, et par la relation de récurrence,

$$\begin{aligned}
(1+1)u_3-(2\times1+1)u_2+1\times u_1=\ln\left(1+\frac{1}{1}\right) &\iff 2u_3-3+1=\ln(2)\\
&\iff u_3=\frac{2+\ln(2)}{2}=1+\frac{1}{2}\ln(2),\\
(2+1)u_4-(2\times2+1)u_3+2\times u_2=\ln\left(1+\frac{1}{2}\right) &\iff 3u_4-5\times\left(1+\frac{1}{2}\ln(2)\right)+2=\ln\left(\frac{3}{2}\right)\\
&\iff 3u_4=3+\frac{5}{2}\ln(2)+\ln(3)-\ln(2)\\
&\iff u_4=\frac{1}{3}\left(3+\frac{3}{2}\ln(2)+\ln(3)\right)\\
&\iff u_4=1+\frac{1}{2}\ln(2)+\frac{1}{3}\ln(3).
\end{aligned}$$

3. Grâce à la formule de récurrence, et comme les termes précédents de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont stockés dans le tableau u, voici la fonction complétée :

```
1.  import numpy as np
2.  def Suite_U(N):
3.      u=np.ones(N)
4.      for k in range(1,N-1):
5.          u[k+1]=(np.log(1+1/k)+(2*k+1)*u[k]-k*u[k-1])/(k+1)
6.      return u
```

4. a) Par définition de la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$,

$$w_1=\frac{\mathrm{e}^{1\times(u_2-u_1)}}{1}=\mathrm{e}^{(1-1)}=\mathrm{e}^0=1.$$

b) Pour montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, j'exprime pour tout $n\in\mathbb{N}^*$ le terme w_{n+1} en fonction de w_n. Pour cela, je réécris la formule de récurrence sous une autre forme :

$$(n+1)u_{n+2}-(2n+1)u_{n+1}+nu_n=\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)\iff(n+1)\big(u_{n+2}-u_{n+1}\big)-n\big(u_{n+1}-u_n\big)=\ln\left(\frac{n+1}{n}\right).$$

Alors pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\begin{aligned}
w_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{(n+1)\left(u_{n+2}-u_{n+1}\right)}}{n+1}&=\frac{\mathrm{e}^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)+\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}}{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)}}{n+1}\times\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{n+1}{n}\right)}=\frac{\mathrm{e}^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)}}{n+1}\times\frac{n+1}{n}\\
&=\frac{\mathrm{e}^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)}}{n}=w_n.
\end{aligned}$$

Finalement, j'ai bien montré que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante, où tous les termes sont égaux à $w_1=1$ d'après la question précédente.

c) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad w_n = \dfrac{e^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)}}{n} = 1$, *i.e.*

$$e^{n\left(u_{n+1}-u_n\right)} = n \quad \Longleftrightarrow \quad n\left(u_{n+1}-u_n\right) = \ln(n) \quad \Longleftrightarrow \quad u_{n+1}-u_n = \frac{\ln(n)}{n}.$$

d) Soit $N \geqslant 3$. Par télescopage, et comme $u_2 = 1$,

$$\sum_{n=2}^{N-1}\left(u_{n+1}-u_n\right) = \cancel{u_3} - u_2 + \cancel{u_4} - \cancel{u_3} + \cancel{\cdots} + u_N - \cancel{u_{N-1}} = u_N - u_2 = u_N - 1.$$

Et en remplaçant la différence $u_{n+1}-u_n$ par l'expression trouvée à la question précédente, alors j'obtiens bien que

$$u_N = 1 + \sum_{n=2}^{N-1}\left(u_{n+1}-u_n\right) = 1 + \sum_{n=2}^{N-1}\frac{\ln(n)}{n}.$$

5. a) Pour obtenir les variations de f, j'étudie le signe de la dérivée.
f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(t) = \ln(t)$ et $v(t) = t$. Comme $u'(t) = \dfrac{1}{t}$ et $v'(t) = 1$, alors

$$f'(t) = \frac{u'(t)v(t) - u(t)v'(t)}{v(t)^2} = \frac{\frac{1}{t}\times t - \ln(t)\times 1}{t^2} = \frac{1-\ln(t)}{t^2}.$$

Or pour $t \geqslant 3$, en particulier $t \geqslant e \approx 2.7$, donc $\ln(t) \geqslant \ln(e) = 1$.
Ainsi sur $\left[3,+\infty\right[$, $\quad t^2 > 0$ et $1-\ln(t) \leqslant 0$, donc $f'(t) \leqslant 0$ et la fonction f est décroissante.

b) Par décroissance de la fonction f, pour tout $k \geqslant 3$, $\quad \forall t \in [k, k+1]$, $\; f(k+1) \leqslant f(t) \leqslant f(k)$.
Puis par croissance de l'intégrale, pour $k \geqslant 3$,

$$\int_k^{k+1} f(k+1)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \int_k^{k+1} f(k)\,dt, \qquad i.e. \quad f(k+1) \leqslant \int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant f(k),$$

puisqu'il s'agit d'intégrer une constante sur un intervalle de longueur 1.

c) Soit $N \geqslant 4$. En sommant l'inégalité précédente pour tous les k entre 3 et $N-1$, j'obtiens

$$\sum_{k=3}^{N-1} f(k+1) \leqslant \sum_{k=3}^{N-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{N-1} f(k).$$

Or sommer les $f(k+1)$ pour tous les k entre 3 et $N-1$ revient à sommer les $f(k)$ pour tous les k entre 4 et N, *i.e.* $\displaystyle\sum_{k=3}^{N-1} f(k+1) = \sum_{k=4}^{N} f(k)$.
Et par la relation de Chasles,

$$\sum_{k=3}^{N-1}\int_k^{k+1} f(t)\,dt = \int_3^4 f(t)\,dt + \cdots + \int_{N-1}^{N} f(t)\,dt = \int_3^N f(t)\,dt.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\sum_{k=4}^{N} f(k) \leqslant \int_3^N f(t)\,dt \leqslant \sum_{k=3}^{N-1} f(k).$$

d) Par définition de la fonction f et grâce à la question **4.d)**, pour $N \geqslant 3$,

$$u_N = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} \frac{\ln(n)}{n} = 1 + \sum_{n=2}^{N-1} f(n) = 1 + \sum_{k=2}^{N-1} f(k).$$

Puis grâce aux deux inégalités obtenues à la question précédente, pour $N \geqslant 4$,

$$u_N = 1 + f(2) + \sum_{k=3}^{N-1} f(k) \geqslant 1 + f(2) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t, \qquad \text{et comme } f(N) \geqslant 0,$$
$$u_N = 1 + f(2) + f(3) + \sum_{k=4}^{N-1} f(k) \leqslant 1 + f(2) + f(3) + \sum_{k=4}^{N} f(k) \leqslant 1 + f(2) + f(3) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme ces deux inégalités restent trivialement vraies pour $N = 3$, j'ai bien montré que pour tout $N \geqslant 3$,

$$1 + f(2) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant u_N \leqslant 1 + f(2) + f(3) + \int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t.$$

6. a) Je note h la fonction définie sur $\mathbb{R}_+^*$ par $h(t) = \big(\ln(t)\big)^2$.
h est de la forme u^2 avec $u(t) = \ln(t)$. Comme $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, alors

$$h'(t) = 2 \times u'(t) \times u(t) = 2 \times \frac{1}{t} \times \ln(t) = 2 \times \frac{\ln(t)}{t} = 2f(t).$$

b) Grâce à la question précédente, comme $h' = 2f$, alors une primitive de f est donnée par $F(t) = \dfrac{1}{2} \times h(t) = \dfrac{\big(\ln(t)\big)^2}{2}$. Je peux alors calculer l'intégrale :

$$\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t = \left[\frac{\big(\ln(t)\big)^2}{2}\right]_3^N = \frac{\ln(N)^2}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2}.$$

7. Tout d'abord, comme $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(N) = +\infty$, alors $\lim\limits_{N\to+\infty} \ln(N)^2 = +\infty$ et $\lim\limits_{N\to+\infty} \dfrac{1}{\ln(N)^2} = 0$.
Puis grâce à la question **6.b)**,

$$\frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2} - \frac{\ln(3)^2}{2\ln(N)^2} \qquad \text{et} \qquad \lim_{N\to+\infty} \frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{2}.$$

Enfin grâce à l'encadrement de la question **5.d)**,

$$\frac{1+f(2)}{\ln(N)^2} + \frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \frac{u_N}{\ln(N)^2} \leqslant \frac{1+f(2)+f(3)}{\ln(N)^2} + \frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Par opérations sur les limites,

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{1+f(2)}{\ln(N)^2} + \frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{N\to+\infty} \frac{1+f(2)+f(3)}{\ln(N)^2} + \frac{1}{\ln(N)^2}\int_3^N f(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2} = \frac{1}{2},$$

et par le théorème des gendarmes, j'en déduis que la suite de terme général $\dfrac{u_N}{\ln(N)^2}$ converge et que

$$\lim_{N\to+\infty} \frac{u_N}{\ln(N)^2} = \frac{1}{2}.$$

8. a) Je commence par déterminer une primitive de $g(t) = \dfrac{1}{t} \times \dfrac{1}{\ln(t)^2}$.

g semble de la forme $u' \times \dfrac{1}{u^2}$, avec $u(t) = \ln(t)$. Puisque $u'(t) = \dfrac{1}{t}$, alors

$$u'(t) \times \frac{1}{u(t)^2} = \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2} = g(t).$$

Ainsi une primitive de g est donnée par $G(t) = -\dfrac{1}{u(t)} = -\dfrac{1}{\ln(t)}$.

Je peux alors calculer l'intégrale, pour $A \in [2, +\infty[$:

$$\int_2^A \frac{1}{t} \times \frac{1}{\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{\ln(t)}\right]_2^A = -\frac{1}{\ln(A)} - \left(-\frac{1}{\ln(2)}\right) = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}.$$

b) D'après l'énoncé, la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{nu_n}$ partage la même nature que l'intégrale $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$.

D'après la question précédente, pour tout $A \in [2, +\infty[$, $\displaystyle\int_2^A \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)}$.

Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln(A) = +\infty$, alors $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{1}{\ln(2)} - \frac{1}{\ln(A)} = \frac{1}{\ln(2)} - 0 = \frac{1}{\ln(2)}$. Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{t\ln(t)^2}\,\mathrm{d}t$ converge et il en est de même pour la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{nu_n}$.

En conclusion, la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nu_n}$ existe et est finie. En notant S sa somme et en posant $\alpha_u = \dfrac{1}{S}$, alors la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\alpha_u}{nu_n}$ converge et sa somme vaut

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha_u}{nu_n} = \alpha_u \times \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{nu_n} = \frac{1}{S} \times S = 1.$$

En outre, chaque terme $\dfrac{\alpha_u}{nu_n}$ étant compris entre 0 et 1, cela permet bien de définir une variable aléatoire X_u dont la loi est donnée par $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(X_u = n) = \dfrac{\alpha_u}{nu_n}$.