BSB 2024

Exercice 1 –

1. Je calcule la somme $D+N$ dans le but de retrouver la matrice A :

$$D+N=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1&0\\0&1&1\\0&0&2\end{pmatrix}=A.$$

   Ainsi j'ai montré que $A=D+N$.

2. Je calcule les deux produits matriciels DN et ND :

$$DN=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}=N,$$
$$ND=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&-1&0\\0&0&2\\0&0&0\end{pmatrix}.$$

   Je remarque alors que l'égalité $DN=N$ est bien vérifiée, mais que $ND\neq N$.
   En particulier $ND\neq DN$ donc les matrices N et D ne commutent pas.

Première méthode

3. Comme $a_1=-1$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\quad a_{n+1}=a_n-1,\quad$ alors j'en déduis par itérations successives que

$$a_2=a_1-1=-1-1=-2,\qquad a_3=a_2-1=-2-1=-3\quad\text{et}\quad a_4=a_3-1=-3-1=-4.$$

   Ainsi j'ai montré que $a_4=-4$.

4. Comme $c_1=1$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\quad c_{n+1}-c_n=2^n,\quad$ alors j'en déduis par itérations successives que

$$c_2=c_1+2^1=1+2=3\quad\text{et}\quad c_3=c_2+2^2=3+4=7.$$

   Ainsi j'ai bien montré que $c_3=7$.

5. Comme $b_1=0$ et que pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\quad b_{n+1}=b_n-c_n,\quad$ alors j'en déduis par itérations successives que

$$b_2=b_1-c_1=0-1=-1\quad\text{et}\quad b_3=b_2-c_2=-1-3=-4.$$

   Ainsi j'ai montré que $b_2=-1$ et $b_3=-4$.

6. Comme pour tout $n\in\mathbb{N}^*,\quad a_{n+1}=a_n-1,\quad$ alors la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est arithmétique, de raison $r=-1$ et de premier terme $a_1=-1$. Sa forme explicite est donc donnée par la formule

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad a_n=a_1+(n-1)\times r=-1+(n-1)\times(-1)=-1-n+1=-n.$$

   Je remarque que cette formule correspond avec la valeur de a_4 obtenue à la question **3.**.

7. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je reconnais en $\sum_{k=0}^{n-1} 2^k$ la somme des n premières puissances de 2. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n-1} 2^k = \frac{1-2^n}{1-2} = \frac{1-2^n}{-1} = -\left(1-2^n\right) = 2^n - 1.$$

Pour $n \geqslant 2$, la somme $\sum_{k=1}^{n-1} 2^k$ est égale à la somme précédente à qui l'on a retiré le premier terme correspondant à $k=0$, *i.e.* $2^0 = 1$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} 2^k = \sum_{k=0}^{n-1} 2^k - 2^0 = 2^n - 1 - 1 = 2^n - 2.$$

8. Soit $n \geqslant 2$. La somme $\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k$ est une somme télescopique dans laquelle il ne reste à la fin que les termes de la suite avec les indices extrêmes, tous les autres s'annulant entre eux :

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = \cancel{c_2} - c_1 + \cancel{c_3} - \cancel{c_2} + \cancel{c_4} - \cancel{c_3} + \cancel{\cdots} + \cancel{c_{n-1}} - \cancel{c_{n-2}} + c_n - \cancel{c_{n-1}} = c_n - c_1.$$

Ainsi j'ai bien montré que $\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = c_n - c_1$.

9. Soit $n \geqslant 2$. Comme pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $c_{k+1} - c_k = 2^k$, alors en sommant cette égalité pour tous les k entre 1 et $n-1$, j'obtiens que $\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k$.
Puis en remplaçant ces sommes par leurs formules obtenues précédemment, alors

$$\sum_{k=1}^{n-1} c_{k+1} - c_k = \sum_{k=1}^{n-1} 2^k \iff c_n - c_1 = 2^n - 2 \iff c_n = c_1 + 2^n - 2 = 1 + 2^n - 2 = 2^n - 1.$$

Pour $n = 1$, $c_1 = 1$ et $2^1 - 1 = 2 - 1 = 1$. Donc la formule $c_n = 2^n - 1$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
Je remarque aussi que cette formule correspond avec la valeur de c_3 obtenue à la question **4.**.

10. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.
Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $b_n = (n+1) - 2^n$.
Initialisation : Pour $n = 1$,

$$b_1 = 0 \quad \text{et} \quad (0+1) - 2^0 = 1 - 1 = 0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.
Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $b_n = (n+1) - 2^n$. Or

$$b_{n+1} = b_n - c_n = (n+1) - 2^n - \left(2^n - 1\right) = (n+1) - 2^n - 2^n + 1 = (n+1+1) - 2 \times 2^n = (n+2) - 2^{n+1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.
Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad b_n = (n+1) - 2^n.$$

Je remarque que cette formule correspond avec les valeurs de b_2 et b_3 obtenues à la question **5.**.

11. Pour $n=1$, alors $A^n = A$ et les valeurs initiales des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ se lisent directement sur la matrice A. Ainsi

$$u_1 = -1, \qquad v_1 = 0 \quad \text{et} \quad w_1 = 1.$$

12. Pour commencer, je remarque que les valeurs initiales trouvées à la question précédente correspondent :

$$u_1 = -1 = a_1, \qquad v_1 = 0 = b_1 \quad \text{et} \quad w_1 = 1 = c_1.$$

Puis pour $n \geqslant 1$, je calcule alors le produit $A \times A^n$ pour obtenir les relations de récurrence :

$$A \times A^n = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & u_n - 1 & v_n - w_n \\ 0 & 1 & w_n + 2^n \\ 0 & 0 & 2^{n+1} \end{pmatrix}.$$

Or il s'agit là de la matrice A^{n+1}, ainsi je peux obtenir les relations de récurrence des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(w_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_{n+1} = u_n - 1, \qquad v_{n+1} = v_n - w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = w_n + 2^n.$$

Je retrouve là aussi les mêmes relations que pour les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Comme les valeurs initiales et les relations de récurrences sont identiques, alors les suites sont égales :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a_n, \qquad v_n = b_n \quad \text{et} \quad w_n = c_n.$$

13. D'après les questions précédentes,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = a_n = -n, \qquad v_n = b_n = (n+1) - 2^n \quad \text{et} \quad w_n = c_n = 2^n - 1.$$

Alors en remplaçant ces formules dans l'expression de A^n, j'obtiens l'expression suivante :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A^n = \begin{pmatrix} 1 & u_n & v_n \\ 0 & 1 & w_n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & (n+1) - 2^n \\ 0 & 1 & 2^n - 1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Seconde méthode

14. Par définition, 0 est une valeur propre si et seulement si l'équation matricielle $AX = 0X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, admet une solution non nulle.

Je pose donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et je résous l'équation grâce au système équivalent :

$$AX = 0X \iff \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & y & & & = & 0 \\ & & y & + & z & = & 0 \\ & & & & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Or la troisième ligne de ce système affirme que $z = 0$.
Puis la deuxième ligne est équivalente à $y = -z = -0 = 0$.
Enfin la première ligne est équivalente à $x = y = 0$.
Finalement la seule solution de l'équation matricielle $AX = 0X$ est la solution nulle.
Donc il n'existe pas de solution non nulle et 0 n'est donc pas valeur propre de la matrice A.

15. Je calcule le produit matriciel AW :

$$A \times W = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ -1-1 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} = 2W.$$

Comme W est une matrice colonne non nulle et que $AW = 2W$, alors W est un vecteur propre de la matrice A associé à la valeur propre 2.

16. Par définition, 1 est une valeur propre si et seulement si l'équation matricielle $AX = 1X$, d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$, admet une solution non nulle.

Je pose donc $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ et je résous l'équation grâce au système équivalent :

$$\begin{aligned} AX = 1X \quad &\Longleftrightarrow \quad \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 1 \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x - y = x \\ y + z = y \\ 2z = z \end{cases} \\ &\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} -y = 0 \\ z = 0 \\ z = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Ce système est équivalent aux deux équations $y = 0$ et $z = 0$. Comme x n'est pas impliqué dans les équations, il me suffit de choisir $x = 1$, en gardant $y = z = 0$ pour obtenir une solution non nulle du système. Ainsi 1 est une valeur propre de la matrice A

et $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre associé à cette valeur.

17. Je calcule le produit matriciel $P^2 = P \times P$:

$$P^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

18. Comme $P^2 = I_3$, *i.e.* $P \times P = I_3$, alors la matrice P est inversible et son inverse est $P^{-1} = P$.

19. Je calcule le produit matriciel $P \times A$ puis multiplie le résultat par P :

$$P \times A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1-2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix},$$

$$PA \times P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1+1-2 \\ 0 & 1 & -1+1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Puis je calcule la somme $D + M$ dans le but de retrouver la matrice $S = PAP$:

$$D + M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = PAP = S.$$

Ainsi j'ai bien montré que $S = D + M$.

20. Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$,

$$D^k = \begin{pmatrix} 1^k & 0 & 0 \\ 0 & 1^k & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^k \end{pmatrix}.$$

21. Je calcule le produit matriciel $M^2 = M \times M$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Comme $M^2 = 0_3$, alors pour tout $k \geqslant 2$, $\quad M^k = M^2 \times M^{k-2} = 0_3 \times M^{k-2} = 0_3$.

22. Je calcule les deux produits matriciels MD et DM :

$$MD = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M,$$
$$DM = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = M.$$

Je remarque alors que $MD = M$ et $DM = M$.
En particulier $MD = DM$ donc les matrices M et D commutent.

23. Grâce à la formule donnée, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1! \times (n-1)!} = \frac{n!}{(n-1)!} = \frac{n \times (n-1)!}{(n-1)!} = n.$$

24. Comme les matrices M et D commutent, je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $S = D + M$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$S^n = \left(D + M\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times D^{n-k} \times M^k.$$

Or dans cette somme, tous les termes pour $k \geqslant 2$ sont nuls puisque $M^k = 0_3$ pour tout $k \geqslant 2$. Ainsi il reste

$$S^n = \binom{n}{0} \times D^{n-0} \times M^0 + \binom{n}{1} \times D^{n-1} \times M^1 = 1 \times D^n \times I_3 + n \times D^{n-1} \times M = D^n + nM,$$

puisque par itération, si $DM = M$, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad D^{n-1}M = M$.

25. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$S^n = D^n + n \times M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & -n & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

26. Comme $S = PAP$ et que $P^2 = I_3$, alors en multipliant à gauche et à droite par P, j'obtiens que

$$P \times S \times P = P \times PAP \times P = P^2 \times A \times P^2 = I_3 \times A \times I_3 = A.$$

Ainsi j'ai montré que $A = PSP$.

Pour la suite, je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PS^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad PS^0P = PI_3P = P^2 = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = PS^nP$. Or

$$A^{n+1} = A^n \times A = PS^nP \times PSP = PS^nI_3SP = PS^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PS^nP.$$

27. Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit matriciel $P \times S^n$ puis multiplie le résultat par P :

$$P \times S^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -n & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2^n \\ 0 & 1 & -2^n \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix},$$

$$A^n = PS^n \times P = \begin{pmatrix} 1 & -n & 2^n \\ 0 & 1 & -2^n \\ 0 & 0 & -2^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & 1+n-2^n \\ 0 & 1 & -1+2^n \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -n & (n+1)-2^n \\ 0 & 1 & 2^n-1 \\ 0 & 0 & 2^n \end{pmatrix}.$$

Je remarque que cette formule est identique à celle obtenue à la question **13.** selon la première méthode.

Exercice 2 –

1. La différence entre les trois fonctions se situe au niveau des numérateurs où la constante est différente : il s'agit donc d'un facteur multiplicatif près. Je vais calculer les images en 0 afin de reconnaître les graphiques :

$$f(0) = \frac{1}{(1+0)^2} = 1, \qquad g(0) = \frac{2}{(1+0)^2} = 2 \quad \text{et} \quad h(0) = \frac{3}{(1+0)^2} = 3.$$

Ainsi en regardant l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 0 sur chaque graphique, j'en déduis que le graphique A représente la fonction h, le graphique B représente la fonction f et le graphique C représente la fonction g.

2. Si les trois graphiques représentent bien trois fonctions positives, continues sauf en deux points, il faut estimer la valeur de l'intégrale qui doit être égale à 1. Pour cela, il suffit de comparer l'aire sous la courbe sur l'intervalle $[0,1]$ avec l'aire du rectangle de longueur 1 et de largeur 1. Sur le graphique A, l'aire est bien plus grande donc l'intégrale de la fonction est strictement supérieure à 1 alors que sur le graphique B, l'aire est bien plus petite donc l'intégrale de la fonction est strictement inférieure à 1 : dès lors, ces deux graphiques ne peuvent pas représenter une densité de probabilité.

3. Je calcule l'intégrale de la fonction g, représentée par le graphique C, sur l'intervalle $[0,1]$.
La fonction g semble de la forme $\frac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x$. Puisque $u'(x) = 1$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{2} \times g(x).$$

Ainsi une primitive de la fonction g est donnée par

$$H(x) = 2 \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -2 \times \frac{1}{1+x} = -\frac{2}{1+x}.$$

Dès lors, je peux calculer l'intégrale :

$$I = \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2}{1+x}\right]_0^1 = -\frac{2}{1+1} - \left(-\frac{2}{1+0}\right) = -1 + 2 = 1.$$

4. Pour montrer que g est une densité de probabilité, je vérifie les trois points de la définition :
   - Pour $x \notin [0,1]$, $g(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \in [0,1]$, $g(x) = \frac{2}{(1+x)^2} \geqslant 0$ car $2 > 0$ et qu'un carré est aussi toujours positif. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g(x) \geqslant 0$.
   - Sur l'intervalle $]-\infty, 0[$, la fonction g est continue car constante, sur l'intervalle $[0,1]$, la fonction g est continue comme quotient de fonctions continues et sur l'intervalle $]1, +\infty[$, la fonction g est continue car constante.
     Donc g admet au plus deux points de discontinuité (en 0 et en 1).
   - D'après la question précédente, $\int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x = I = 1$.
     Aussi $\int_{-\infty}^0 g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^0 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0, de même que $\int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$.
     Alors par la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} g(x)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 g(x)\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que la fonction g est une densité de probabilité.

5. a) Étant donnée la densité d'une variable aléatoire, la fonction de répartition s'obtient grâce à la formule suivante : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t$.

J'opère alors par disjonction de cas :

- Si $x < 0$, alors
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0.$$
- Si $0 \leqslant x \leqslant 1$, alors
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{x} \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t = 0 + \left[-\frac{2}{1+t}\right]_0^x = -\frac{2}{1+x} - \left(-\frac{2}{1+0}\right) = 2 - \frac{2}{1+x},$$
en utilisant la primitive obtenue à la question **3.**.
- Si $x > 1$, alors
$$G(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{1} \frac{2}{(1+t)^2}\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement j'ai bien montré que
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 2 - \dfrac{2}{1+x} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) À l'aide de la fonction de répartition,
$$P\left(X \leqslant \frac{1}{2}\right) = G\left(\frac{1}{2}\right) = 2 - \frac{2}{1+\frac{1}{2}} = 2 - \frac{4}{3} = \frac{2}{3}.$$

c) La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge. Or $\int_{-\infty}^{0} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}x = 0$ et $\int_{1}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}x = 0$.

Alors par la relation de Chasles, l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ converge et
$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x = 0 + \int_{0}^{1} xg(x)\,\mathrm{d}x + 0 = \int_{0}^{1} \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x.$$

Je calcule alors cette intégrale. Je note alors k la fonction $k(x) = \dfrac{2x}{(1+x)^2}$ dont je cherche une primitive. Il ne s'agit pas d'une forme habituelle, je dois réécrire cette fonction autrement :
$$\forall x \in [0,1], \quad k(x) = \frac{2x}{(1+x)^2} = \frac{2+2x-2}{(1+x)^2} = \frac{2(1+x)}{(1+x)^2} - \frac{2}{(1+x)^2} = \frac{2}{1+x} - \frac{2}{(1+x)^2},$$
$$\textit{i.e.} \quad k(x) = 2 \times \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{(1+x)^2}\right).$$

Puis une primitive de $k_1(x) = \dfrac{1}{1+x}$ est donnée par $K_1(x) = \ln(1+x)$

et une primitive de $k_2(x) = -\dfrac{1}{(1+x)^2}$ est donnée par $K_2(x) = \dfrac{1}{1+x}$.

Ainsi une primitive de $k = 2 \times \left(k_1 + k_2\right)$ est donnée par $K = 2 \times \left(K_1 + K_2\right)$, *i.e.*

$$K(x) = 2 \times \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right).$$

Et finalement,

$$\begin{aligned} E(X) &= \int_0^1 \frac{2x}{(1+x)^2}\,\mathrm{d}x = \left[2 \times \left(\ln(1+x) + \frac{1}{1+x}\right)\right]_0^1 \\ &= 2 \times \left(\ln(1+1) + \frac{1}{1+1}\right) - 2 \times \left(\ln(1+0) + \frac{1}{1+0}\right) \\ &= 2 \times \left(\ln(2) + \frac{1}{2}\right) - 2 \times \left(0+1\right) = 2\ln(2) + 1 - 2 = 2\ln(2) - 1. \end{aligned}$$

Exercice 3 –

Première partie

1. À chaque PILE obtenu, le joueur ajoute une boule dans l'urne. Alice obtient deux fois PILE donc dépose deux boules rouges dans l'urne. Bob obtient une fois PILE donc dépose une boule verte dans l'urne. L'urne contient donc à la fin deux boules rouges pour une boule verte : $X = 2$ et $Y = 1$. Comme le nombre de boules rouges est strictement plus grand que le nombre de boules vertes, alors Alice est déclarée vainqueur.
2. L'événement A : "Alice gagne" signifie qu'il y a strictement plus de boules rouges que de boules vertes dans l'urne. Comme X représente le nombre de boules rouges et Y le nombre de boules vertes, alors l'événement A correspond à ce que X soit strictement supérieur à Y, *i.e.*
$$A = [X > Y].$$
3. Il s'agit dans les deux cas de 3 ou de 2 répétitions identiques et indépendantes d'une épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité $p = \frac{1}{2}$ (les pièces sont équilibrées). X compte le nombre de boules rouges dans l'urne, c'est-à-dire le nombre de PILE obtenus par Alice lors de ses trois lancers de pièce. Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n_A = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
De même, Y compte le nombre de boules vertes dans l'urne, c'est-à-dire le nombre de PILE obtenus par Bob lors de ses deux lancers de pièce.
Ainsi Y suit une loi binomiale de paramètres $n_B = 2$ et $p = \dfrac{1}{2}$.
Comme les deux lois sont binomiales, alors les espérances sont données par
$$E(X) = n_A \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2} \quad \text{et} \quad E(Y) = n_B \times p = 2 \times \frac{1}{2} = 1.$$
4. Comme X suit une loi binomiale de paramètres $n_A = 3$ et $p = \dfrac{1}{2}$, alors son support est donné par $X(\Omega) = [\![0,3]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,
$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{3-k} = \binom{3}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{8} \times \binom{3}{k}.$$
Or $\dbinom{3}{0} = \dbinom{3}{3} = 1$ et $\dbinom{3}{1} = \dbinom{3}{2} = 3$, ce qui me permet d'obtenir la loi de X, récapitulée dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(X = k)$	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

5. L'objet de ce programme est de simuler trois lancers d'une pièce équilibrée, représentée par une variable aléatoire de Bernoulli de paramètre $p = \dfrac{1}{2}$. Voici donc le script complété.

```
import numpy.random as rd

def simulation_alice():
    X=0
    for k in range(1,4):
        r=rd.random()
        if r>1/2:
            X=X+1
    return X
```

6. D'après la question **3.**, $E(X) = \dfrac{3}{2}$ et $E(Y) = 1$.
Comme l'espérance de X est plus grande, Alice semble favorisée. Cependant il faut prendre en compte le fait que X ne peut prendre que des valeurs entières et qu'Alice n'est déclarée vainqueur que si le nombre de boules rouges est strictement supérieur.
7. Si l'on suppose que Bob n'obtient aucun PILE, alors il n'y a aucune boule verte dans l'urne et Alice est déclarée vainqueur s'il y a au moins une boule rouge dans l'urne. D'après la loi de X calculée à la question **4.**,
$$P_{[Y=0]}(A) = P(X \geqslant 1) = 1 - P(X=0) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}.$$
8. En raisonnant de la même manière qu'à la question précédente, j'obtiens que
$$P_{[Y=1]}(A) = P(X \geqslant 2) = P(X=2) + P(X=3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P_{[Y=2]}(A) = P(X=3) = \frac{1}{8}.$$
Puis comme Y suit une loi binomiale de paramètres $n_B = 2$ et $p = \dfrac{1}{2}$, alors son support est donné par $Y(\Omega) = [\![0,2]\!]$ et pour tout $k \in Y(\Omega)$,
$$P(Y=k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{2}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{2-k} = \binom{2}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} \times \binom{2}{k}.$$
Ainsi $P(Y=0) = P(Y=2) = \dfrac{1}{4}$ et $P(Y=1) = \dfrac{1}{2}$. Aussi, comme $[Y=0]$, $[Y=1]$ et $[Y=2]$ forment un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales,
$$\begin{aligned} P(A) &= P\big([Y=0] \cap A\big) + P\big([Y=1] \cap A\big) + P\big([Y=2] \cap A\big) \\ &= P(Y=0) \times P_{[Y=0]}(A) + P(Y=1) \times P_{[Y=1]}(A) + P(Y=2) \times P_{[Y=2]}(A) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{7}{8} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{8} = \frac{7}{32} + \frac{8}{32} + \frac{1}{32} = \frac{16}{32} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$
9. D'après la question précédente, la probabilité de A est $\frac{1}{2}$, c'est-à-dire qu'Alice a une chance sur deux de gagner. Ainsi Bob a lui aussi une chance sur deux de gagner puisque le jeu déclare toujours un vainqueur. Le jeu est donc bel et bien équitable.
10. Je cherche $P_A(Y=0)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
$$P_A(Y=0) = \frac{P\big([Y=0] \cap A\big)}{P(A)} = \frac{\frac{7}{32}}{\frac{1}{2}} = \frac{7}{32} \times 2 = \frac{7}{16}.$$
En sachant que Alice gagne, la probabilité que Bob n'ait obtenu aucun PILE est $\dfrac{7}{16}$.

Seconde partie

11. L'événement A_1 signifie qu'Alice remporte la première manche. Au cours de cette manche, Bob n'a qu'une boule verte à disposition. Pour qu'Alice soit déclarée vainqueur, il faut qu'il y ait strictement plus de boules rouges que de boules vertes dans l'urne. Comme chacun des deux joueurs possède une seule boule, cela signifie que l'urne contient une boule rouge et aucune boule verte, ce qui implique qu'Alice a obtenu PILE lors de son lancer alors que Bob a lui obtenu FACE. Par indépendance des événements, la probabilité de l'événement A_1 est égale au produit des deux probabilités correspondant aux lancers de deux pièces : Alice a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'obtenir PILE alors que Bob a une probabilité $1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$ d'obtenir FACE. Finalement
$$a_1 = P(A_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

12. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si l'on suppose l'événement $\overline{A_n}$, cela signifie qu'Alice n'a pas gagné la manche n, donc que celle-ci a été remportée par Bob et ainsi, qu'il débute la manche $n+1$ avec une seule boule verte. On se retrouve alors exactement dans la situation de la première marche et donc la probabilité qu'Alice remporte la manche $n+1$ est la même que de remporter la manche 1 :

$$P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = P(A_1) = \frac{1}{3}.$$

13. a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On suppose cette fois que qu'Alice a remporté la manche n et ainsi, que Bob débute la manche $n+1$ avec deux boules vertes. Je cherche la probabilité que Bob mette deux boules vertes dans l'urne, c'est-à-dire qu'il obtienne deux fois PILE lors de ses deux lancers de pièce. Comme les lancers sont indépendants et que la probabilité d'obtenir PILE à un lancer est $\frac{1}{3}$, alors la probabilité que Bob place deux boules vertes dans l'urne est donnée par $\dfrac{1}{3} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$.

    b) Je cherche la probabilité qu'Alice remporte la manche $n+1$ après avoir déjà remporté la manche n, c'est-à-dire en sachant que Bob dispose de deux boules vertes. Cependant Alice ne possède toujours qu'une seule boule. La seule configuration de l'urne qui permette à Alice de remporter la partie est donc toujours la même : une boule rouge pour aucune boule verte. Cela implique donc que Bob doit obtenir deux FACE à ses deux lancers de pièces. Par indépendance des événements, comme Alice a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'obtenir PILE alors que Bob a une probabilité $\frac{2}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$ d'obtenir deux fois FACE, alors

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{2} \times \frac{4}{9} = \frac{2}{9}.$$

    c) Par complémentarité,

$$P_{A_n}(\overline{A_{n+1}}) = 1 - P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - \frac{2}{9} = \frac{7}{9}.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Comme $\{A_n, \overline{A_n}\}$ forme un système complet d'événements, alors par la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}),$$

$$\textit{i.e.} \quad a_{n+1} = a_n \times \frac{2}{9} + (1 - a_n) \times \frac{1}{3} = \frac{2}{9}a_n - \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3} = -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3}.$$

Finalement j'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad a_{n+1} = -\dfrac{1}{9}a_n + \dfrac{1}{3}$.

15. Voici le script complété.

```
def terme(n):
    a=1/3
    for k in range(n):
        a=-a/9+1/3
    return a
```

16. Il s'agit d'une équation de degré 1 que je résous en isolant x :

$$x = -\frac{1}{9}x + \frac{1}{3} \iff x + \frac{1}{9}x = \frac{1}{3} \iff \frac{10}{9}x = \frac{1}{3} \iff x = \frac{9}{10} \times \frac{1}{3} = \frac{3}{10}.$$

17. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je cherche à exprimer u_{n+1} en fonction de u_n :

$$u_{n+1} = a_{n+1} - \ell = -\frac{1}{9}a_n + \frac{1}{3} - \ell = -\frac{1}{9} \times (u_n + \ell) + \frac{1}{3} - \ell = -\frac{1}{9}u_n - \frac{1}{9}\ell + \frac{1}{3} - \ell = -\frac{1}{9}u_n,$$

puisque $-\frac{1}{9}\ell + \frac{1}{3} = \ell$ par définition de la variable ℓ (dont j'ai trouvé à la question précédente que $\ell = \frac{3}{10}$). Ainsi comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_{n+1} = -\frac{1}{9}u_n \quad$ alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est bien géométrique, de raison $q = -\frac{1}{9}$.

18. Je calcule le premier terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$:

$$u_1 = a_1 - \ell = \frac{1}{3} - \frac{3}{10} = \frac{10-9}{30} = \frac{1}{30}.$$

Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, je peux donner sa forme explicite :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = u_1 \times q^{n-1} = \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}.$$

19. D'après la question précédente et comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad u_n = a_n - \ell, \quad$ alors

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = u_n + \ell = \frac{1}{30} \times \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} + \frac{3}{10}.$$

20. Comme $-\frac{1}{9} \in \left]-1, 1\right[$, alors $\quad \lim\limits_{n\to+\infty} \left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1} = 0. \quad$ Ainsi par opérations sur les limites,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{30} \times 0 + \frac{3}{10} = \frac{3}{10} = 0.3.$$

Exercice 4 –

Calcul de l'intégrale I_1.

1. La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme quotient de fonctions dérivables. g est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x+1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, alors
$$g'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1 \times \mathrm{e}^x - (x+1) \times \mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = \frac{-x\,\mathrm{e}^x}{\left(\mathrm{e}^x\right)^2} = -\frac{x}{\mathrm{e}^x}.$$

2. Comme $\mathrm{e}^{-x} = \dfrac{1}{\mathrm{e}^x}$, alors $F_1(x) = -(x+1)\,\mathrm{e}^{-x} = -\dfrac{x+1}{\mathrm{e}^x} = -g(x)$ et sa dérivée est donnée par
$$F_1'(x) = -g'(x) = \frac{x}{\mathrm{e}^x} = x\,\mathrm{e}^{-x} = f_1(x).$$
Ainsi la fonction F_1 est bien une primitive de la fonction f_1.

3. En me servant de la primitive de F_1 trouvée à la question précédente, alors
$$I_1 = \int_0^1 f_1(x)\,\mathrm{d}x = \Big[F_1(x)\Big]_0^1 = -(1+1)\,\mathrm{e}^{-1} - \big(-(0+1)\,\mathrm{e}^{-0}\big) = -2\,\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^0 = 1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Étude de f_2.

4. En décomposant les facteurs du produit,
$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x\to-\infty} x^2 = +\infty \\ \lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = +\infty \end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to-\infty} f_2(x) = +\infty.$$
Pour la limite en $+\infty$, il me faut utiliser les croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{-x} = 0$ domine et
$$\lim_{x\to+\infty} f_2(x) = \lim_{x\to+\infty} x^2\,\mathrm{e}^{-x} = 0.$$

5. La fonction f_2 est dérivable sur $\mathbb{R}$ comme produit de fonctions dérivables. f_2 est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$. Comme $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, alors
$$f_2'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \mathrm{e}^{-x} + x^2 \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(2x - x^2\right)\mathrm{e}^{-x} = (2-x)x\,\mathrm{e}^{-x}.$$
Je retrouve bien l'expression donnée par l'énoncé.

6. Je connais la dérivée de f_2 et en étudiant le signe de $f_2'(x)$, je peux obtenir les variations de f_2.
Or $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} > 0 \quad$ et $\quad 2 - x \geqslant 0 \iff x \leqslant 2$.
Je peux donc établir le tableau de signe de $f_2'(x)$ et ainsi le tableau de variation de f_2, en ajoutant les limites déjà calculées ainsi que les extrema : $\quad f_2(0) = 0^2\,\mathrm{e}^{-0} = 0 \quad$ et $\quad f_2(2) = 2^2\,\mathrm{e}^{-2} = 4\,\mathrm{e}^{-2}$.

x	$-\infty$		0		2		$+\infty$
$2-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x		$-$	0	$+$		$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f_2'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f_2	$+\infty$	↘	0	↗	$4\,\mathrm{e}^{-2}$	↘	0

7. Grâce au tableau de variation, je remarque que sur l'intervalle $\left[0,+\infty\right[$, la fonction f_2 admet pour minimum 0 et pour maximum $4\,\mathrm{e}^{-2}$, ce qui montre que $\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f_2(x) \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}$.
8. Par croissance de l'intégrale, comme $\forall x \geqslant 0, \quad 0 \leqslant f_2(x) \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}$, alors
$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 4\,\mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{d}x.$$
Puis comme $\int_0^1 0\,\mathrm{d}x = 0$ et que $\int_0^1 4\,\mathrm{e}^{-2}\,\mathrm{d}x = 4\,\mathrm{e}^{-2} \times \left[x\right]_0^1 = 4\,\mathrm{e}^{-2}$, alors je retrouve bien l'encadrement
$$0 \leqslant I_2 \leqslant 4\,\mathrm{e}^{-2}.$$
9. Je cherche à calculer l'intégrale $I_2 = \int_0^1 f_2(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$ à l'aide d'une intégration par parties. Je pose donc
$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^2$$
de sorte que
$$u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 2x.$$
Alors par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_2 = \int_0^1 x^2\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[x^2\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 2x \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -1^2\,\mathrm{e}^{-1} + 0^2\,\mathrm{e}^{-0} + 2\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} + 2I_1. \end{aligned}$$
Finalement j'ai bien montré que $\quad I_2 = -e^{-1} + 2I_1$.
10. Grâce à la formule obtenue à la question précédente et à la valeur de I_1 obtenue à la question **3.**,
$$I_2 = -e^{-1} + 2I_1 = -e^{-1} + 2 \times \left(1 - 2\,\mathrm{e}^{-1}\right) = -e^{-1} + 2 - 4\,\mathrm{e}^{-1} = 2 - 5\,\mathrm{e}^{-1}.$$

Étude de la suite (I_n).

11. Comme je connais une primitive, je peux calculer directement l'intégrale :
$$I_0 = \int_0^1 \mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = \left[-\,\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1 = -\,\mathrm{e}^{-1} + \mathrm{e}^{-0} = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$
12. En raisonnant comme dans la question **9.**, je peux exprimer l'intégrale I_{n+1} en fonction de I_n : $I_{n+1} = \int_0^1 f_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. Je pose
$$u'(x) = \mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad v(x) = x^{n+1}$$
de sorte que
$$u(x) = -\,\mathrm{e}^{-x} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = (n+1)x^n.$$
Alors par intégration par parties,
$$\begin{aligned} I_{n+1} = \int_0^1 x^{n+1}\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x &= \left[x^{n+1}\left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 (n+1)x^n \times \left(-\,\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \\ &= -1^{n+1}\,\mathrm{e}^{-1} + 0^{n+1}\,\mathrm{e}^{-0} + (n+1)\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x = -e^{-1} + (n+1)I_n. \end{aligned}$$
Finalement j'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}, \quad I_{n+1} = -e^{-1} + (n+1)I_n$.

13. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\dfrac{I_n}{n!} = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \mathrm{e}^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$\frac{I_0}{0!} = I_0 = 1 - \mathrm{e}^{-1} \quad \text{et} \quad 1 - \left(\sum_{k=0}^{0} \frac{1}{k!}\right) \mathrm{e}^{-1} = 1 - \frac{1}{0!}\mathrm{e}^{-1} = 1 - \mathrm{e}^{-1}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\dfrac{I_n}{n!} = 1 - \left(\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right) \mathrm{e}^{-1}$. Or

$$\frac{I_{n+1}}{(n+1)!} = \frac{-e^{-1} + (n+1)I_n}{(n+1)!} = \frac{-e^{-1}}{(n+1)!} + \frac{(n+1)I_n}{(n+1)!} = -\frac{1}{(n+1)!}e^{-1} + \frac{I_n}{n!}$$
$$= -\frac{1}{(n+1)!}e^{-1} + 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} + \frac{1}{(n+1)!}\right)\mathrm{e}^{-1} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n+1} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{I_n}{n!} = 1 - \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}\right)\mathrm{e}^{-1}.$$

14. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. La fonction f_n définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par $f_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ est dérivable. En reprenant la méthode de la question **5.**, f_n est de la forme $u \times v$, avec $u(x) = x^n$ et $v(x) = \mathrm{e}^{-x}$.
Comme $u'(x) = nx^{n-1}$ et $v'(x) = -\mathrm{e}^{-x}$, alors

$$f_n'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = nx^{n-1} \times \mathrm{e}^{-x} + x^n \times \left(-\mathrm{e}^{-x}\right) = \left(nx^{n-1} - x^n\right)\mathrm{e}^{-x} = (n-x)x^{n-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Puis comme $n \geqslant 1$, alors sur l'intervalle $[0,1]$, $\quad n - x \geqslant 0, \quad x^{n-1} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \mathrm{e}^{-x} > 0$.
Donc $\forall x \in [0,1], \quad f_n'(x) \geqslant 0$ et la fonction f_n est croissante sur $[0,1]$.

15. Grâce à la question précédente et en reprenant cette fois la méthode des questions **7.** et **8.**, $\forall x \in [0,1]$,

$$f_n(0) \leqslant f_n(x) \leqslant f_n(1) \iff 0 \leqslant f_n(x) \leqslant \mathrm{e}^{-1},$$

et par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 f_n(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 \mathrm{e}^{-1}\,\mathrm{d}x \iff 0 \leqslant I_n \leqslant \mathrm{e}^{-1}.$$

16. D'après la question précédente, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $\dfrac{0}{n!} = 0 \leqslant \dfrac{I_n}{n!} \leqslant \dfrac{\mathrm{e}^{-1}}{n!}$.

Et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-1}}{n!} = 0$, alors d'après le théorème d'encadrement des limites, la suite $\left(\dfrac{I_n}{n!}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0$. Par unicité de la limite, en notant $u_n = \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} 1 - u_n\mathrm{e}^{-1} = \lim_{n\to+\infty} \frac{I_n}{n!} = 0.$$

Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers une limite ℓ qui satisfait l'équation $1 - \ell\,\mathrm{e}^{-1} = 0$.
Finalement,

$$1 - \ell\,\mathrm{e}^{-1} = 0 \iff \ell = \frac{1}{\mathrm{e}^{-1}} = \mathrm{e}^1 = \mathrm{e}.$$

La limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est la constante e.