

ESCP 2023

Exercice 1 –

1. Je commence par calculer le carré de la matrice A :

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = A + 2I.$$

J'ai montré que $A^2 = A + 2I$. Alors $A^2 - A - 2I = 0_3$, matrice nulle d'ordre 3, ce qui signifie que le polynôme $x^2 - x - 2$, qui est bien de degré 2, est un polynôme annulateur de la matrice A .

2. a) Les valeurs propres possibles pour la matrice A sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Il me suffit donc de trouver les racines du polynôme $x^2 - x - 2$.

Je calcule son discriminant : $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-2) = 1 + 8 = 9 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) + \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{1+3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1-3}{2} = \frac{-2}{2} = -1.$$

Ainsi les deux valeurs propres possibles pour la matrice A sont -1 et 2 .

b) En me servant du polynôme annulateur,

$$A^2 - A - 2I = 0_3 \quad \Leftrightarrow \quad A^2 - A = 2I \quad \Leftrightarrow \quad A \times (A - I) = 2I \quad \Leftrightarrow \quad A \times \left(\frac{1}{2}(A - I) \right) = I.$$

Grâce à cette égalité, j'en déduis que la matrice A est inversible et que son inverse est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{2}(A - I).$$

3. a) Je calcule les trois produits matriciels demandés :

$$\begin{aligned} AU &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 \\ 1+1 \\ 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2U, \\ AV &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1-1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = -V, \\ AW &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = -1 \times \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = -W. \end{aligned}$$

Comme U est une matrice colonne non nulle telle que $AU = 2U$, alors 2 est effectivement valeur propre de A , associée au vecteur propre $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

De même, comme V est une matrice colonne non nulle telle que $AV = -V$, alors -1 est effectivement valeur propre de A , associée au vecteur propre $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Enfin pour les mêmes raisons, W est un autre vecteur propre associé à la valeur propre -1 .

- b) Je calcule puis compare les deux produits matriciels. Comme les colonnes de Q sont les vecteurs propres de la matrice A , alors je connais déjà les colonnes de la matrice AQ :

$$A \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q \times D = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien vérifié l'égalité matricielle $AQ = QD$.

- c) Je calcule le produit matriciel QR :

$$Q \times R = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1+1 & 1-1 & 1-1 \\ 1+1-2 & 1+2 & 1-1 \\ 1-2+1 & 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3I.$$

Comme $Q \times R = 3I$, alors la matrice Q est inversible et son inverse est donnée par

$$Q^{-1} = \frac{1}{3}R.$$

- d) Comme la matrice Q est inversible, alors l'équation $AQ = QD$ se réécrit $A = QDQ^{-1}$, où la matrice D est diagonale et la matrice Q est inversible. Il s'agit de la définition d'une matrice diagonalisable. Donc la matrice A est bien diagonalisable.

4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $A^n = QD^nQ^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad QD^0Q^{-1} = QIQ^{-1} = QQ^{-1} = I.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi. Par hypothèse de récurrence, $A^n = QD^nQ^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = QD^nQ^{-1} \times QDQ^{-1} = QD^nIDQ^{-1} = QD^nDQ^{-1} = QD^{n+1}Q^{-1}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = QD^nQ^{-1}.$$

- b) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $A^n = QD^nQ^{-1}$.

Or je connais Q et Q^{-1} et comme D est une matrice diagonale, alors

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix}.$$

Pour obtenir la matrice A^n , il me suffit de calculer le produit $A^n = QD^nQ^{-1}$. Ici, seule la première ligne est demandée.

$$\begin{aligned}
 Q \times D^n &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & (-1)^n & 0 \\ 0 & 0 & (-1)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}, \\
 A^n = QD^n \times Q^{-1} &= \begin{pmatrix} 2^n & (-1)^n & (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + (-1)^n + (-1)^n & 2^n + (-1)^n - 2 \times (-1)^n & 2^n - 2 \times (-1)^n + (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix} \\
 &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2^n + 2 \times (-1)^n & 2^n - (-1)^n & 2^n - (-1)^n \\ * & * & * \\ * & * & * \end{pmatrix}.
 \end{aligned}$$

Je retrouve la formule annoncée par l'énoncé pour la première ligne de la matrice A^n .

5. a) À l'instant 0, le jeton se trouve sur le sommet 1 et il se déplace de façon équiprobable sur l'un des deux autres sommets. Ainsi le jeton quitte le sommet 1 et a une chance sur deux d'arriver sur les sommets 2 et 3 :

$$P(X_1 = 1) = 0, \quad P(X_1 = 2) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad P(X_1 = 3) = \frac{1}{2}.$$

Alors comme $\{[X_1 = 2], [X_1 = 3]\}$ forme un système complet d'événements, en utilisant la formule des probabilités totales et le fait que le jeton a une probabilité $\frac{1}{2}$ d'aller sur chacun des autres sommets, j'obtiens bien les formules annoncées par l'énoncé :

$$\begin{aligned}
 P(X_2 = 1) &= P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 1) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}, \\
 P(X_2 = 2) &= P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 2) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 2) = \frac{1}{2} \times 0 + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \\
 P(X_2 = 3) &= P(X_1 = 2) \times P_{[X_1=2]}(X_2 = 3) + P(X_1 = 3) \times P_{[X_1=3]}(X_2 = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0 = \frac{1}{4}.
 \end{aligned}$$

- b) Je reprends un raisonnement similaire. Pour $n \geq 2$, $\{[X_n = 1], [X_n = 2], [X_n = 3]\}$ forme un système complet d'événements et pour tout $(i, j) \in \llbracket 1, 3 \rrbracket^2$, les probabilités conditionnelles sont données par

$$P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = j) = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j, \\ \frac{1}{2} & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned}
 P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{i=1}^3 P(X_n = i) \times P_{[X_n=i]}(X_{n+1} = 1) \\
 &= P(X_n = 1) \times 0 + P(X_n = 2) \times \frac{1}{2} + P(X_n = 3) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}P(X_n = 2) + \frac{1}{2}P(X_n = 3)
 \end{aligned}$$

- c) De la même manière, je peux démontrer que pour tout entier $n \geq 2$,

$$P(X_{n+1} = 2) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 3) \quad \text{et} \quad P(X_{n+1} = 3) = \frac{1}{2}P(X_n = 1) + \frac{1}{2}P(X_n = 2).$$

Alors en posant B la matrice égale à $B = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}A$,
j'obtiens bien que pour tout entier $n \geq 2$,

$$\begin{aligned} L_n \times B &= (P(X_n = 1) \quad P(X_n = 2) \quad P(X_n = 3)) \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{2} (P(X_n = 2) + P(X_n = 3) \quad P(X_n = 1) + P(X_n = 3) \quad P(X_n = 1) + P(X_n = 2)) \\ &= (P(X_{n+1} = 1) \quad P(X_{n+1} = 2) \quad P(X_{n+1} = 3)) = L_{n+1}. \end{aligned}$$

d) Je vérifie que $L_0 \times B$ soit bien égale à L_1 , puis que $L_1 \times B$ soit bien égale à L_2 :

$$\begin{aligned} L_0 \times B &= (1 \quad 0 \quad 0) \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} (0 \quad 1 \quad 1) = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = L_1, \\ L_1 \times B &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \right) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} \end{pmatrix} = L_2. \end{aligned}$$

Ainsi l'égalité $L_{n+1} = L_n B$ est vérifiée pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

e) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $L_n = L_0 B^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $L_0 B^0 = L_0 \times I = L_0$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $L_n = L_0 B^n$.

Et grâce à la question précédente, $L_{n+1} = L_n B$. Alors directement

$$L_{n+1} = L_n B = L_0 B^n \times B = L_0 B^{n+1}.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad L_n = L_0 B^n.$$

f) La loi de X_n est donnée par les trois coefficients de la matrice L_n .

D'après la question 5.e), $L_n = L_0 B^n$. D'après la question 5.c), $B = \frac{1}{2}A$.

Donc

$$L_n = L_0 \times \left(\frac{1}{2}A \right)^n = \left(\frac{1}{2} \right)^n \times L_0 A^n.$$

En utilisant la question 4.b), comme $L_0 = (1 \quad 0 \quad 0)$, alors

$$L_0 \times A^n = \frac{1}{3} (2^n + 2 \times (-1)^n \quad 2^n - (-1)^n \quad 2^n - (-1)^n).$$

Et finalement, en multipliant par $\left(\frac{1}{2} \right)^n$,

$$L_n = \frac{1}{3} \left(1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n \quad 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \quad 1 - \left(-\frac{1}{2} \right)^n \right).$$

Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, la loi de X_n est donnée par

$$P(X_n = 1) = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n, \quad P(X_n = 2) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n \quad \text{et} \quad P(X_n = 3) = \frac{1}{3} - \frac{1}{3} \times \left(-\frac{1}{2} \right)^n.$$

Exercice 2 –

1. Je montre que la fonction f vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :

- Pour $x \notin [0, 1]$, $f(x) = 0 \geq 0$ et pour $x \in [0, 1]$, $f(x) = 4x(1 - x^2) \geq 0$ car $x \geq 0$ et $1 - x^2 \geq 0$ puisque $x \leq 1$. Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geq 0$.
- Sur $] -\infty, 0[$, f est continue car constante, sur $[0, 1]$, f est continue car polynomiale et sur $]1, +\infty[$, f est continue car constante.

Donc f admet au plus deux points de discontinuité sur \mathbb{R} .

- Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$.

Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

$$\triangleright \int_{-\infty}^0 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 0 dx \text{ converge et vaut } 0.$$

$$\triangleright \int_1^{+\infty} f(x) dx = \int_1^{+\infty} 0 dx \text{ converge et vaut } 0.$$

$$\triangleright \int_0^1 f(x) dx = \int_0^1 4x(1 - x^2) dx = \int_0^1 4x - 4x^3 dx.$$

La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x - 4x^3 dx = \left[4 \times \frac{x^2}{2} - 4 \times \frac{x^4}{4} \right]_0^1 = \left[2x^2 - x^4 \right]_0^1 = (2 \times 1^2 - 1^4) - (2 \times 0^2 - 0^4) = 2 - 1 = 1.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^0 f(x) dx + \int_0^1 f(x) dx + \int_1^{+\infty} f(x) dx = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Finalement, j'ai bien montré que f est une densité de probabilité.

2. a) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

$$\bullet \int_{-\infty}^0 xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 x \times 0 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx \text{ converge et vaut } 0.$$

$$\bullet \int_1^{+\infty} xf(x) dx = \int_1^{+\infty} x \times 0 dx = \int_1^{+\infty} 0 dx \text{ converge et vaut } 0.$$

$$\bullet \int_0^1 xf(x) dx = \int_0^1 4x^2(1 - x^2) dx = \int_0^1 4x^2 - 4x^4 dx.$$

La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^2 - 4x^4 dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - \frac{4}{5}x^5 \right]_0^1 = \left(\frac{4}{3} \times 1^3 - \frac{4}{5} \times 1^5 \right) - 0 = \frac{20 - 12}{15} = \frac{8}{15}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \int_{-\infty}^0 xf(x) dx + \int_0^1 xf(x) dx + \int_1^{+\infty} xf(x) dx = 0 + \frac{8}{15} + 0 = \frac{8}{15}.$$

Finalement la variable aléatoire X possède une espérance et $E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x) dx = \frac{8}{15}$.

b) La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge. Je calcule séparément les trois intégrales suivantes :

- $\int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 \times 0 dx = \int_{-\infty}^0 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_1^{+\infty} x^2 \times 0 dx = \int_1^{+\infty} 0 dx$ converge et vaut 0.
- $\int_0^1 x^2 f(x) dx = \int_0^1 4x^3(1-x^2) dx = \int_0^1 4x^3 - 4x^5 dx$.

La fonction est un polynôme, dont je détermine une primitive terme à terme :

$$\int_0^1 4x^3 - 4x^5 dx = \left[4 \times \frac{x^4}{4} - 4 \times \frac{x^6}{6} \right]_0^1 = \left[x^4 - \frac{2}{3}x^6 \right]_0^1 = \left(1^4 - \frac{2}{3} \times 1^6 \right) - 0 = 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3}.$$

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \int_{-\infty}^0 x^2 f(x) dx + \int_0^1 x^2 f(x) dx + \int_1^{+\infty} x^2 f(x) dx = 0 + \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{3}.$$

Ainsi la variable aléatoire X^2 possède une espérance et $E(X^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x) dx = \frac{1}{3}$.

Finalement, grâce à la formule de König-Huygens, j'en déduis que la variable aléatoire X possède une variance et

$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{1}{3} - \left(\frac{8}{15} \right)^2 = \frac{1}{3} - \frac{64}{225} = \frac{75-64}{225} = \frac{11}{225}.$$

3. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt$.

- Si $x < 0$, alors $F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^x 0 dt = 0$.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 4t(1-t^2) dt = 0 + \left((2x^2 - x^4) - 0 \right) = 2x^2 - x^4,$$

en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question 1.

- Si $x > 1$, alors il me faut découper l'intégrale en trois morceaux :

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^1 4t(1-t^2) dt + \int_1^x 0 dt = 0 + 1 + 0 = 1,$$

toujours en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question 1.

Il me reste alors à me ramener à la forme souhaitée par l'énoncé.

Je dois montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, $2x^2 - x^4 = 1 - (1 - x^2)^2$. Or pour $x \in [0, 1]$,

$$1 - (1 - x^2)^2 = 1 - (1^2 - 2 \times 1 \times x^2 + (x^2)^2) = 1 - (1 - 2x^2 + x^4) = 1 - 1 + 2x^2 - x^4 = 2x^2 - x^4.$$

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

4. a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1]$ est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Soit $x \in \mathbb{R}$. Comme U et V ont G pour fonction de répartition, alors

$$P(M > x) = P(U > x) \times P(V > x) = (1 - P(U \leq x)) \times (1 - P(V \leq x)) = (1 - G(x))^2.$$

Puis pour la fonction de répartition,

$$F_M(x) = P(M \leq x) = 1 - P(M > x) = 1 - (1 - G(x))^2.$$

c) En combinant les expressions obtenues aux deux questions précédentes, j'obtiens que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_M(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

5. a) De nouveau, j'opère par disjonction de cas selon les valeurs de x :

- Si $x < 0$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = 0$ car une racine carrée ne peut pas être strictement négative.
- Si $0 \leq x \leq 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = P(M \leq x^2)$ car $x \geq 0$.
Et comme $0 \leq x \leq 1 \implies 0 = 0^2 \leq x^2 \leq 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M(x^2) = 1 - (1 - x^2)^2$.
- Si $x > 1$, alors $F_Z(x) = P(Z \leq x) = P(\sqrt{M} \leq x) = P(M \leq x^2)$ car $x \geq 0$.
Et comme $x > 1 \implies x^2 > 1^2 = 1$, alors $F_Z(x) = F_M(x^2) = 1$.

Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F_Z(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - (1 - x^2)^2 & \text{si } 0 \leq x \leq 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

b) Les deux variables aléatoires X et Z partagent la même fonction de répartition.

Comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors X et Z suivent la même loi.

c) Grâce à la question précédente, pour simuler X , il suffit de simuler Z , qui est la racine carrée de la variable aléatoire M . Ainsi le script Python se complète ainsi :

1.	<code>U=rd.random()</code>
2.	<code>V=rd.random()</code>
3.	<code>M=np.min(U,V)</code>
4.	<code>X=np.sqrt(M)</code>

Exercice 3 –

1. a) Comme les supports de X et de Y sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et que $S = X + Y$, alors S peut prendre toutes les valeurs entières entre 0 et 4 :

$$S(\Omega) = \{0, 1, 2, 3, 4\}.$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant de l'indépendance des variables aléatoires X et Y :

$$P(S = 0) = P([X = 0] \cap [Y = 0]) = P(X = 0) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$\begin{aligned} P(S = 1) &= P([X = 0] \cap [Y = 1]) + P([X = 1] \cap [Y = 0]) \\ &= P(X = 0) \times P(Y = 1) + P(X = 1) \times P(Y = 0) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16} + \frac{1}{16} = \frac{1}{8}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 2) &= P([X = 0] \cap [Y = 2]) + P([X = 1] \cap [Y = 1]) + P([X = 2] \cap [Y = 0]) \\ &= P(X = 0) \times P(Y = 2) + P(X = 1) \times P(Y = 1) + P(X = 2) \times P(Y = 0) \\ &= \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{8} = \frac{5}{16}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} P(S = 3) &= P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) \\ &= P(X = 1) \times P(Y = 2) + P(X = 2) \times P(Y = 1) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}, \end{aligned}$$

$$P(S = 4) = P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P(X = 2) \times P(Y = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}.$$

Je résume la loi de S dans un tableau :

k	0	1	2	3	4
$P(S = k)$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

- b) Grâce à la loi de S , je peux calculer son espérance :

$$E(S) = 0 \times \frac{1}{16} + 1 \times \frac{1}{8} + 2 \times \frac{5}{16} + 3 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{8} + \frac{5}{8} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{4} + \frac{3}{4} + 1 = \frac{3}{2} + 1 = \frac{5}{2}.$$

- c) Par définition, $S = X + Y$ et par linéarité de l'espérance, $E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y)$.
Or

$$E(X) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4} \quad \text{et} \quad E(Y) = 0 \times \frac{1}{4} + 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4},$$

donc finalement, je retrouve bien

$$E(S) = E(X + Y) = E(X) + E(Y) = \frac{5}{4} + \frac{5}{4} = \frac{5}{2}.$$

2. a) Comme les supports de X et de Y sont donnés par $X(\Omega) = Y(\Omega) = \{0, 1, 2\}$ et que $T = XY$, alors T peut prendre les valeurs 0, 1, 2 et 4 :

$$T(\Omega) = \{0, 1, 2, 4\}.$$

- b) Grâce à la formule de Poincaré,

$$\begin{aligned} P(T = 0) &= P([X = 0] \cup [Y = 0]) = P(X = 0) + P(Y = 0) - P([X = 0] \cap [Y = 0]) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{1}{2} - \frac{1}{16} = \frac{8-1}{16} = \frac{7}{16}. \end{aligned}$$

Pour déterminer la loi, je calcule les probabilités de chaque issue possible en me servant des probabilités déjà calculées à la question 1.a). J'obtiens alors

$$P(T = 1) = P([X = 1] \cap [Y = 1]) = \frac{1}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{16},$$

$$P(T = 2) = P([X = 1] \cap [Y = 2]) + P([X = 2] \cap [Y = 1]) = P(S = 3) = \frac{1}{4},$$

$$P(T = 4) = P([X = 2] \cap [Y = 2]) = P(S = 4) = \frac{1}{4}.$$

Je résume la loi de T dans un tableau :

k	0	1	2	4
$P(T = k)$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

c) Grâce à la loi de T , je peux calculer son espérance :

$$E(T) = 0 \times \frac{7}{16} + 1 \times \frac{1}{16} + 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times \frac{1}{4} = 0 + \frac{1}{16} + \frac{1}{2} + 1 = \frac{1 + 8 + 16}{16} = \frac{25}{16}.$$

d) Par définition, $T = XY$ et comme les variables aléatoires X et Y sont indépendantes,

$$E(T) = E(XY) = E(X) \times E(Y) = \frac{5}{4} \times \frac{5}{4} = \frac{25}{16}.$$

3. En me servant des calculs déjà effectués, j'obtiens aisément la loi du couple (S, T) .

En effet, je sais déjà que $[S = 4] = [T = 4]$, $[S = 3] = [T = 2]$, $[S = 0] \cup [S = 1] \subset [T = 0]$

et que $[T = 1] \subset [S = 2]$. Finalement, voici le tableau représentant la loi du couple (S, T) :

	$T = 0$	$T = 1$	$T = 2$	$T = 4$
$S = 0$	$\frac{1}{16}$	0	0	0
$S = 1$	$\frac{1}{8}$	0	0	0
$S = 2$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$S = 3$	0	0	$\frac{1}{4}$	0
$S = 4$	0	0	0	$\frac{1}{4}$

En sommant les probabilités de chaque ligne, je retrouve bien la loi de S et en sommant les probabilités de chaque colonne, je retrouve bien la loi de T .

4. Les variables aléatoires S et T ne sont pas indépendantes. Si c'était le cas, alors on aurait par exemple $P([S = 0] \cap [T = 1]) = P(S = 0) \times P(T = 1)$. Or

$$P([S = 0] \cap [T = 1]) = 0 \quad \text{et} \quad P(S = 0) \times P(T = 1) = \frac{1}{16} \times \frac{1}{16} \neq 0.$$

Donc les variables aléatoires S et T ne sont pas indépendantes.

5. Grâce à la loi du couple (S, T) , je peux calculer l'espérance du produit ST :

$$E(ST) = 2 \times 1 \times \frac{1}{16} + 3 \times 2 \times \frac{1}{4} + 4 \times 4 \times \frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{3}{2} + 4 = \frac{1 + 12 + 32}{8} = \frac{45}{8}.$$

La covariance $\text{Cov}(S, T)$ s'obtient à l'aide de la formule de König-Huygens :

$$\text{Cov}(S, T) = E(ST) - E(S) \times E(T) = \frac{45}{8} - \frac{5}{2} \times \frac{25}{16} = \frac{45}{8} - \frac{125}{32} = \frac{180 - 125}{32} = \frac{55}{32}.$$

Exercice 4 –

1. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : " u_n est bien défini et strictement positif".

Initialisation : Pour $n = 1$, $u_1 = \frac{1}{2} > 0$ donc u_1 est bien défini et strictement positif.
Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, u_n est bien défini et strictement positif.
Comme $u_n > 0$, alors $2(n+1)u_n + 1 > 1$ est non nul donc le quotient

$$u_{n+1} = \frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1}$$

est bien défini. Et comme numérateur et dénominateur sont strictement positifs, alors le quotient aussi. Donc u_{n+1} est strictement positif.

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \text{ est bien défini et strictement positif.}$$

J'ai ainsi montré que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est bien définie et qu'il s'agit d'une suite de réels strictement positifs.

- b) Voici la fonction Python complétée :

```

1. def suite(n):
2.     u=1/2
3.     for k in range(2,n+1):
4.         u=u/(2*k*u+1)
5.     return(u)
```

2. Je calcule u_2 puis u_3 à l'aide de la formule de récurrence donnée :

$$u_2 = \frac{u_1}{2 \times (1+1) \times u_1 + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2 \times 2 \times \frac{1}{2} + 1} = \frac{\frac{1}{2}}{2+1} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6},$$

$$u_3 = \frac{u_2}{2 \times (2+1) \times u_2 + 1} = \frac{\frac{1}{6}}{2 \times 3 \times \frac{1}{6} + 1} = \frac{\frac{1}{6}}{1+1} = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{12}.$$

3. a) J'ai déjà montré à la question 1. que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $0 < u_{n+1}$.

Puis pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, comme $2(n+1)u_n + 1 > 2(n+1)u_n$,

alors par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{2(n+1)u_n + 1} < \frac{1}{2(n+1)u_n}$.

Puis en multipliant par $u_n > 0$, $\frac{u_n}{2(n+1)u_n + 1} < \frac{u_n}{2(n+1)u_n}$

i.e., en simplifiant par $u_n > 0$, $u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}$.

J'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 < u_{n+1} < \frac{1}{2(n+1)}.$$

- b) Grâce au théorème des gendarmes, comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} 0 = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{2(n+1)} = 0$, alors j'en déduis que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ converge et que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0.$$

4. a) Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Je calcule la différence $v_{k+1} - v_k$:

$$v_{k+1} - v_k = \frac{1}{u_{k+1}} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k + 1}{u_k} - \frac{1}{u_k} = \frac{2(k+1)u_k}{u_k} = 2(k+1).$$

- b) Si la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ était arithmétique, alors la différence entre deux termes consécutifs serait constante. Ici, ce n'est pas le cas : elle vaut $2(k+1)$, qui dépend de k .
Donc la suite $(v_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ n'est pas arithmétique.

- c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je somme pour les k de 1 à $n-1$ l'équation obtenue à la question 4.a). Je reconnais une somme télescopique d'un côté et la somme des premiers entiers de l'autre :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} (v_{k+1} - v_k) &= v_2 - v_1 + v_3 - v_2 + v_4 - v_3 + \cdots + v_{n-1} - v_{n-2} + v_n - v_{n-1} \\ &= v_n - v_1 = v_n - \frac{1}{u_1} = v_n - \frac{1}{\frac{1}{2}} = v_n - 2, \\ \text{et } \sum_{k=1}^{n-1} 2(k+1) &= 2 \times \sum_{k=1}^{n-1} (k+1) = 2 \times \sum_{k=2}^n k = 2 \times \left(\frac{n(n-1)}{2} - 1 \right) = n(n-1) - 2. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n - 2 = n(n-1) - 2$, *i.e.* $v_n = n(n-1)$.

- d) D'après la définition des termes v_n , alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = \frac{1}{v_n} = \frac{1}{n(n-1)}.$$

Enfin comme $\lim_{n \rightarrow +\infty} n(n-1) = +\infty$, je retrouve bien par quotient que $\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 0$.

5. a) Je calcule la différence de fractions dans le but d'identifier les coefficients a et b .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} = \frac{a(n+1) - bn}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)}.$$

Ainsi par identification des coefficients,

$$u_n = \frac{a}{n} - \frac{b}{n+1} \iff \frac{1}{n(n+1)} = \frac{(a-b)n + a}{n(n+1)} \iff \begin{cases} a-b=0 \\ a=1 \end{cases} \iff \begin{cases} a=1 \\ b=1 \end{cases}$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$.

- b) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Je somme la relation obtenue à la question précédente pour tous les n allant de 1 à N . Je reconnais une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^N u_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{1} - \frac{1}{2} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{N-2} - \frac{1}{N-1} + \frac{1}{N-1} - \frac{1}{N} = 1 - \frac{1}{N}.$$

- c) Il me suffit alors de faire tendre N vers $+\infty$ dans l'expression de la somme partielle obtenue à la question précédente pour déterminer la nature de la série de terme général u_n .

Comme pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, $\sum_{n=1}^N u_n = 1 - \frac{1}{N}$ et que $\lim_{N \rightarrow +\infty} 1 - \frac{1}{N} = 1$,

alors la série $\sum_{n \geq 1} u_n$ converge et $\sum_{n=1}^{+\infty} u_n = 1$.

6. a) J'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, le terme u_n est positif (question 1.) et que la somme infinie de tous les termes u_n vaut 1 (question 5.c).

Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ décrit bien la loi d'une variable aléatoire discrète infinie.

- b) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $t \in [n+1, n+2]$, $t \geq n+1 > 0$ donc par décroissance de la fonction inverse, $\frac{1}{t} \leq \frac{1}{n+1}$. Puis par croissance de l'intégrale,

$$\begin{aligned} \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt &\leq \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{n+1} dt = \frac{1}{n+1} \times \int_{n+1}^{n+2} 1 dt = \frac{1}{n+1} \times [t]_{n+1}^{n+2} \\ &= \frac{1}{n+1} \times ((n+2) - (n+1)) = \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \geq 1$, $\int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt \leq \frac{1}{n+1}$.

- c) Soit $N \in \mathbb{N}^*$. Je somme la relation obtenue à la question précédente pour tous les n allant de 1 à N , puis je calcule l'intégrale à l'aide d'une primitive :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^N \int_{n+1}^{n+2} \frac{1}{t} dt = \sum_{n=1}^N [\ln(t)]_{n+1}^{n+2} = \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - \ln(n+1)).$$

Je reconnais alors une somme télescopique :

$$\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \geq \sum_{n=1}^N (\ln(n+2) - \ln(n+1)) = \ln(N+2) - \ln(1+1) = \ln(N+2) - \ln(2).$$

Finalement j'ai bien montré que $\sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1} \geq \ln(N+2) - \ln(2)$.

- d) La variable aléatoire X possède une espérance si et seulement si la série $\sum_{n \geq 1} nu_n$ converge. Or pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $nu_n = \frac{n}{n(n+1)} = \frac{1}{n+1}$.

Ainsi la somme partielle $\sum_{n=1}^N nu_n = \sum_{n=1}^N \frac{1}{n+1}$ est minorée par $\ln(N+2) - \ln(2)$, qui diverge vers $+\infty$ lorsque N tend vers $+\infty$. Par théorème de comparaison, j'en déduis que la série $\sum_{n \geq 1} nu_n$ diverge et donc que la variable aléatoire X n'admet pas d'espérance.