ECRICOME 2023

Exercice 1 –

Partie 1

1. Voici la fonction `Python` complétée :

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u=u1
    for k in range(n-1):
        u=u*5/12+1/3
    return(u)
```

2. a) Je résous l'équation demandée :

$$x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3} \iff x-\frac{5}{12}x=\frac{1}{3} \iff \frac{7}{12}x=\frac{1}{3} \iff x=\frac{1}{3}\times\frac{12}{7}=\frac{4}{7}.$$

b) Soit $n \geqslant 1$. J'exprime v_{n+1} en fonction de v_n :

$$\begin{aligned} v_{n+1} = u_{n+1}-\ell &= \frac{5}{12}u_n+\frac{1}{3}-\ell = \frac{5}{12}\times\left(v_n+\ell\right)+\frac{1}{3}-\ell \\ &= \frac{5}{12}v_n+\frac{5}{12}\times\ell+\frac{1}{3}-\ell = \frac{5}{12}v_n, \end{aligned}$$

puisque ℓ est la solution de $x=\frac{5}{12}x+\frac{1}{3}$, *i.e.* $\frac{5}{12}\times\ell+\frac{1}{3}-\ell=0$.

Ainsi j'ai bien montré que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est une suite géométrique, de raison $q=\frac{5}{12}$.

c) Comme la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique, de raison $q=\frac{5}{12}$ et de premier terme v_1, alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \geqslant 1, \quad v_n = v_1\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

d) Enfin, comme pour tout $n \geqslant 1$, $u_n=v_n+\ell$ et que $v_1=u_1-\ell$, alors

$$u_n = v_1\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\ell = \left(u_1-\ell\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\ell = \left(u_1-\frac{4}{7}\right)\times\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}+\frac{4}{7}.$$

Partie 2

3. a) Je calcule les produits matriciels AX_1 et AX_2 :

$$AX_1=\begin{pmatrix}9&4\\3&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}36+12\\12+24\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}48\\36\end{pmatrix}=12\times\begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}=12\times X_1,$$

$$AX_2=\begin{pmatrix}9&4\\3&8\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-9+4\\-3+8\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-5\\5\end{pmatrix}=5\times\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=5\times X_2.$$

b) D'après la question précédente, comme X_1 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_1 = 12X_1$, alors 12 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_1. De même, comme X_2 est une matrice colonne non nulle telle que $AX_2 = 5X_2$, alors 5 est une valeur propre de la matrice A, associée au vecteur propre X_2.

4. Comme il s'agit d'une matrice carrée de taille 2, je calcule le déterminant de la matrice P :

$$\det(P) = 4 \times 1 - 3 \times (-1) = 4 + 3 = 7 \neq 0.$$

Comme le déterminant est non nul, alors la matrice P est inversible
et la matrice inverse est donnée par

$$P^{-1} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 1 & -(-1) \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = Q.$$

5. J'effectue le produit matriciel PDP^{-1} dans le but de retrouver la matrice A :

$$P \times D = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix}$$

$$PD \times P^{-1} = \begin{pmatrix} 48 & -5 \\ 36 & 5 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{7} \times \begin{pmatrix} 48+15 & 48-20 \\ 36-15 & 36+20 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 63 & 28 \\ 21 & 56 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} = A.$$

Finalement j'ai bien montré que $A = PDP^{-1}$.

6. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PD^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_2 \quad \text{et} \quad PD^0P^{-1} = PI_2P^{-1} = PP^{-1} = I_2.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $A^n = PD^nP^{-1}$. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PD^nP^{-1} \times PDP^{-1} = PD^nI_2DP^{-1} = PD^nDP^{-1} = PD^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}.$$

7. a) Je calcule le produit :

$$P^{-1}X = QX = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

b) Grâce à la question **6.**, je sais que $A^nX = PD^nP^{-1}X$. Je connais $P^{-1}X$ et comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix}.$$

Finalement je termine le produit matriciel : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n \times P^{-1}X = \begin{pmatrix} 12^n & 0 \\ 0 & 5^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix}$$

$$A^nX = P \times D^nP^{-1}X = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 12^n \\ -3 \times 5^n \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^n + 3 \times 5^n \\ 3 \times 12^n - 3 \times 5^n \end{pmatrix}.$$

Partie 3

8. b_1 correspond à la probabilité qu'il pleuve le premier jour. Or il fait beau le jour 1.
   Donc $b_1 = 0$.
   Puis comme il faut beau le jour 1, la probabilité qu'il fasse beau le jour 2 est $\frac{3}{4}$.
   Ainsi $a_2 = \frac{3}{4}$ et $b_2 = 1 - a_2 = 1 - \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.

9. a) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(A_{n+1}) = P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}).$$

La probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il fait beau le jour n est $P_{A_n}(A_{n+1}) = \frac{3}{4}$
et la probabilité qu'il fasse beau le jour $n+1$ s'il pleut le jour n est $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
Ainsi j'obtiens bien que

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times \frac{3}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{3} = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$

De la même manière, j'obtiens aussi que

$$\begin{aligned} P(B_{n+1}) &= P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) \\ &= P(A_n) \times \left(1 - \frac{3}{4}\right) + P(B_n) \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n). \end{aligned}$$

b) Je calcule le produit $M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ dans le but de retrouver les expressions de a_{n+1} et b_{n+1} :

$$M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12}\begin{pmatrix} 9a_n + 4b_n \\ 3a_n + 8b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{9a_n + 4b_n}{12} \\ \dfrac{3a_n + 8b_n}{12} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n \\ \frac{1}{4}a_n + \frac{2}{3}b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix}$$

Finalement j'ai bien montré que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$.

c) Comme $\{A_n, B_n\}$ forme un système complet d'événements, en particulier les deux événements sont contraires l'un de l'autre et

$$a_n + b_n = P(A_n) + P(B_n) = 1.$$

10. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad M^{1-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = I_2\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Et grâce à la question **9.b)**,

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M \times M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = M^n \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

b) Comme $M = \dfrac{1}{12}A$, alors pour tout $n \geqslant 1$, $M^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{12^{n-1}}A^{n-1}X$.
Or cette matrice ayant été calculée dans la partie précédente, j'en déduis que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = \frac{1}{12^{n-1}} \times \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 \times 12^{n-1} + 3 \times 5^{n-1} \\ 3 \times 12^{n-1} - 3 \times 5^{n-1} \end{pmatrix} = \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 4 + 3 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \\ 3 - 3 \times \left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

En particulier, pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_n = \frac{4}{7} + \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} \quad \text{et} \quad b_n = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

11. a) D'après la question **9.a)**, $a_{n+1} = \dfrac{3}{4}a_n + \dfrac{1}{3}b_n$ et d'après la question **9.c)**, $b_n = 1 - a_n$.
Alors en combinant ces deux équations, j'obtiens bien que

$$a_{n+1} = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{3}{4}a_n + \frac{1}{3} \times (1 - a_n) = \left(\frac{3}{4} - \frac{1}{3}\right)a_n + \frac{1}{3} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}.$$

b) La suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans cette partie vérifie bien la définition de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ étudiée dans la Partie 1, avec $u_1 = a_1 = 1 \in [0,1]$. Alors en me servant du résultat de la question **2.d)** avec $u_1 = 1$, j'obtiens bien que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$a_n = \left(1 - \frac{4}{7}\right) \times \left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7} = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}.$$

c) Enfin j'obtiens aussi que pour tout entier $n \geqslant 1$,

$$b_n = 1 - a_n = 1 - \left(\frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}\right) = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1}.$$

12. Comme $-1 < \dfrac{5}{12} < 1$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{12}\right)^{n-1} = 0$. Finalement par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = 0 + \frac{4}{7} = \frac{4}{7} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{3}{7} - 0 = \frac{3}{7}.$$

13. a) Je cherche $P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big)$. Par la formule des probabilités composées, et comme le temps ne dépend que de celui de la veille,

$$\begin{aligned} P\big(A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_9 \cap B_{10}\big) &= P(A_1) \times P_{A_1}(A_2) \times P_{A_2}(A_3) \times \cdots \times P_{A_8}(A_9) \times P_{A_9}(B_{10}) \\ &= 1 \times \frac{3}{4} \times \cdots \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = 1 \times \left(\frac{3}{4}\right)^8 \times \frac{1}{4} = \frac{3^8}{4^9}. \end{aligned}$$

b) Je cherche $P\big(B_{10}\big)$. Or

$$P\big(B_{10}\big) = b_{10} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{10-1} = \frac{3}{7} - \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^9.$$

Exercice 2 –

Partie 1

1. Je cherche à savoir pour quelles valeurs de x l'expression $f(x)$ est définie.
   - Pour tout $x \in \mathbb{R}$, l'exponentielle e^x est définie et positive.
   - En particulier, $1+e^x > 0$ et comme la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$, alors l'expression $f(x) = \ln\left(1+e^x\right)$ est bien définie pour tout $x \in \mathbb{R}$.

   J'ai bien montré que la fonction f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. La fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}$. f est de la forme $\ln(u)$, avec $u(x) = 1+e^x$. Comme $u'(x) = e^x$, alors
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{e^x}{1+e^x}.$$
   En me servant du fait que pour tout réel x, $e^x > 0$, alors j'obtiens que le quotient $f'(x)$ est strictement positif, donc que la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
3. Je calcule la limite en $-\infty$ en décomposant :
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1\\ \lim\limits_{X\to 1} \ln(X) = 0\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$
   J'en déduis alors que la droite d'équation $y = 0$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $-\infty$.
4. a) Je raisonne de même pour la limite en $+\infty$:
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^x = +\infty\\ \lim\limits_{X\to +\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
   b) En factorisant par l'exponentielle e^x, j'obtiens que pour tout $x \in \mathbb{R}$,
$$f(x) = \ln\left(1+e^x\right) = \ln\left(e^x\left(e^{-x}+1\right)\right) = \ln\left(e^x\right) + \ln\left(e^{-x}+1\right) = x + \ln\left(1+e^{-x}\right).$$
   c) Puisque $\lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1$, alors par composition,
$$\lim_{x\to+\infty} f(x) - x = \lim_{x\to+\infty} \ln\left(1+e^{-x}\right) = \lim_{X\to 1} \ln(X) = \ln(1) = 0.$$
   Comme la limite de la différence est nulle, alors j'en conclus que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$ au voisinage de $+\infty$.

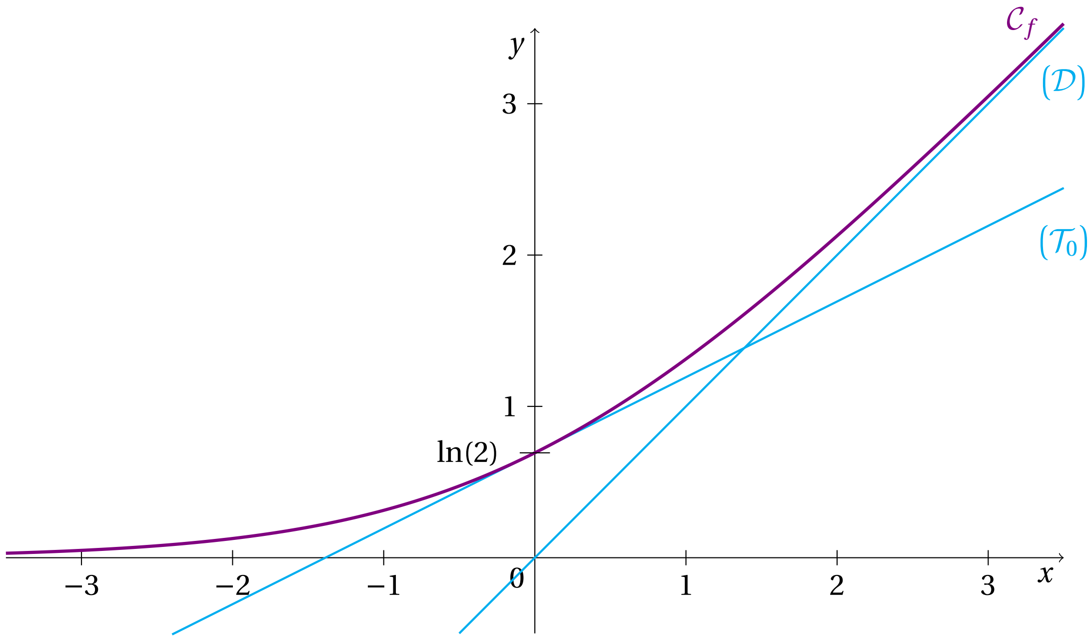
   d) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \ln\left(1+e^{-x}\right)$. Or $e^{-x} > 0$ donc $1+e^{-x} > 1$ et par croissance de la fonction ln, j'en déduis que $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) - x = \ln\left(1+e^{-x}\right) > 0$. Alors la courbe $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'asymptote $(\mathcal{D})$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
5. L'équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0 est donnée par
$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$
   Or $f(0) = \ln\left(1+e^0\right) = \ln\left(1+1\right) = \ln(2)$ et $f'(0) = \dfrac{e^0}{1+e^0} = \dfrac{1}{1+1} = \dfrac{1}{2}$.

   Finalement l'équation de la tangente $(\mathcal{T}_0)$ est donnée par
$$y = \frac{1}{2} \times x + \ln(2) = \frac{x}{2} + \ln(2).$$

6. a) Je sais déjà que f est strictement croissante, je connais les limites et la valeur en 0.
Voici donc le tableau de variation :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\ln(2)$	$+\infty$

b) Grâce au tableau de variation, à la tangente en 0 et aux asymptotes en $-\infty$ et $+\infty$, je peux tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$:



Partie 2

7. a) Déjà, $\forall x \in [0,1]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $g_n(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)$ et $g_{n+1}(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-(n+1)x}\right)$.
Alors comme les fonctions exponentielle et logarithme sont croissantes,
pour tout $x \in [0,1]$ et tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} n+1 \geqslant n &\iff (n+1)x \geqslant nx \iff -(n+1)x \leqslant -nx \\ &\iff \mathrm{e}^{-(n+1)x} \leqslant \mathrm{e}^{-nx} \iff 1+\mathrm{e}^{-(n+1)x} \leqslant 1+\mathrm{e}^{-nx} \\ &\iff \ln\left(1+\mathrm{e}^{-(n+1)x}\right) \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right) \iff g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x). \end{aligned}$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Si pour tout $x \in [0,1]$, $g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$, alors par croissance de l'intégrale,

$$\int_0^1 g_{n+1}(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x \iff I_{n+1} \leqslant I_n.$$

Ainsi la suite d'intégrales $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est bien décroissante.

c) Par un raisonnement similaire à celui de la question **4.d)**, pour $x \in [0,1]$ et $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathrm{e}^{-nx} > 0 \implies 1+\mathrm{e}^{-nx} > 1 \implies g_n(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right) > \ln(1) = 0.$$

Alors par positivité de l'intégrale, j'en déduis que $\forall n \in \mathbb{N}$, $I_n > 0$.
En particulier la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est minorée par 0.
Comme celle-ci est aussi décroissante, alors le théorème de la limite monotone me permet de déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

8. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je cherche à calculer $I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)\mathrm{d}x$.

Je raisonne par intégration par parties : j'introduis un facteur $v'(x) = 1$ dont une primitive est donnée par $v(x) = x$ et je dérive $g_n(x)$ en utilisant que la dérivée de $\ln(u)$ est donnée par $\dfrac{u'}{u}$. Ainsi $g_n'(x) = \dfrac{-n\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}$ et d'après la formule d'intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x = \Big[x g_n(x)\Big]_0^1 - \int_0^1 x \times g_n'(x)\,\mathrm{d}x &= \Big[x\ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{-nx\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x\\ &= 1\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) - 0\times\ln\left(1+\mathrm{e}^{0}\right) - (-n)\times\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x\\ &= \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x.\end{aligned}$$

J'ai bien montré l'expression souhaitée.

b) J'ai déjà montré à la question **7.c)** que pour tout entier n, $I_n \geqslant 0$.
Aussi, dans cette même question, je montre que pour $n \in \mathbb{N}$ et $x \in [0,1]$, $1+\mathrm{e}^{-nx} \geqslant 1$.
Alors $\dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-nx}} \leqslant \dfrac{1}{1} = 1$ et par croissance de l'intégrale, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x \leqslant \int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x \quad\Longrightarrow\quad I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x.$$

Finalement, j'ai bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}$, $0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.

c) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Je cherche à calculer $\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$. Je pose donc

$$u'(x) = \mathrm{e}^{-nx} \qquad \text{et} \qquad v(x) = x$$

de sorte que

$$u(x) = -\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n} \qquad \text{et} \qquad v'(x) = 1.$$

Alors par intégration par parties,

$$\begin{aligned}\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x &= \left[x\times\left(-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)\right]_0^1 - \int_0^1 1\times\left(-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\right)\mathrm{d}x\\ &= -1\times\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + 0\times\frac{\mathrm{e}^{0}}{n} + \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n}\,\mathrm{d}x = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + \left[-\frac{\mathrm{e}^{-nx}}{n^2}\right]_0^1\\ &= -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} - \frac{\mathrm{e}^{-n}}{n^2} + \frac{\mathrm{e}^{0}}{n^2} = -\frac{\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}.\end{aligned}$$

J'ai bien montré que pour tout entier n non nul, $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}$.

d) En combinant les résultats des deux questions précédentes, j'obtiens un encadrement de I_n pour tout entier n :

$$0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\times\left(\frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}\right) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) - \mathrm{e}^{-n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}.$$

Je cherche alors les limites des bornes : comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \mathrm{e}^{-n} = 0$, alors

$$\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) = \ln(1) = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} -\mathrm{e}^{-n} = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n} = 0.$$

Alors par somme, $\lim_{n\to+\infty} \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right)-\mathrm{e}^{-n}+\dfrac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n}=0$, et comme $\lim_{n\to+\infty} 0=0$, alors le théorème des gendarmes me permet de conclure que la suite $\left(I_n\right)_{n\geqslant 0}$ converge *(je le savais déjà)* et que

$$\lim_{n\to+\infty} I_n=0.$$

9. a) Voici une fonction Python permettant d'évaluer la fonction g_n, après importation de la librairie `numpy` :

```
import numpy as np

def gn(n,x):
    return np.log(1+np.exp(-n*x))
```

b) Deux tracés sont visibles sur la figure :

- le nuage de points dont les ordonnées sont données par le vecteur `L_y`, contenant les valeurs de nI_n,
- une portion de la droite horizontale d'équation $y=\dfrac{\pi^2}{12}$.

Je remarque que les points se rapprochent de la portion de droite, ce qui me permet de conjecturer que la suite $\left(nI_n\right)_{n\geqslant 1}$ est convergente et admet pour limite le réel $\dfrac{\pi^2}{12}$.

Exercice 3 –

1. Je montre que la fonction f vérifie les trois conditions d'une densité de probabilité :

   - Pour $x < s$, $f(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant s$, $f(x) = \dfrac{2s^2}{x^3} \geqslant 0$ car $s > 0$ et $x \geqslant s > 0$.
   Donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) \geqslant 0$.
   - Sur $]-\infty, s[$, f est continue car constante
   et sur $[s, +\infty[$, f est continue comme quotient de fonctions continues.
   Donc f admet au plus un point de discontinuité sur $\mathbb{R}$ (en $x = s$).
   - Il me reste à montrer la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$.
   Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
     - ▷ $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
     - ▷ $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x$.
     Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale de f sur le segment $[s, M]$:
     $$\int_{s}^{M} f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x^3}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \left[-\frac{1}{2x^2}\right]_s^M = 2s^2 \times \left(-\frac{1}{2M^2} + \frac{1}{2s^2}\right) = 1 - \frac{s^2}{M^2}.$$
     Puis comme $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 1 - \frac{s^2}{M^2} = 1 - 0 = 1$, alors j'en déduis que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

   Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et
   $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 1 = 1.$$

   Finalement, j'ai bien montré que f est une densité de probabilité.

2. Pour déterminer la fonction de répartition, je raisonne à l'aide d'une disjonction de cas pour appliquer la définition : $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t$.

   - Si $x < s$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
   - Si $x \geqslant s$, alors il me faut découper l'intégrale en deux morceaux :
   $$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}t + \int_{s}^{x} \frac{2s^2}{t^3}\,\mathrm{d}t = 0 + 1 - \frac{s^2}{x^2} = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2,$$
   en réutilisant le calcul d'intégrale effectué à la question précédente.

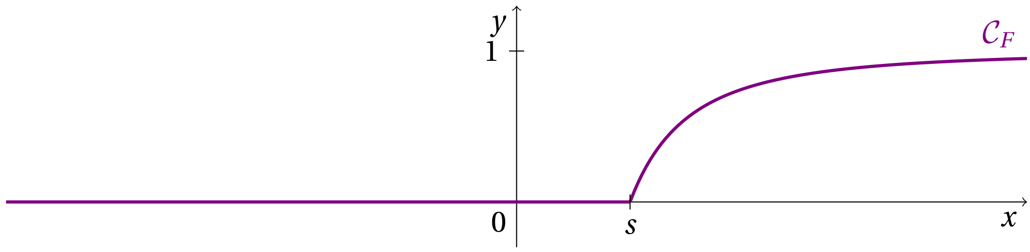
   Ainsi j'ai bien montré que
   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s, \\ 1 - \left(\dfrac{s}{x}\right)^2 & \text{si } x \geqslant s. \end{cases}$$

3. Pour étudier les variations de la fonction F, il me faut étudier la signe de la dérivée F'.
Or puisque F est la fonction de répartition, sa dérivée F' est la fonction de densité f.
Ainsi F est constante sur $]-\infty, s[$ puis strictement croissante sur $[s, +\infty[$.

En particulier, voici le tableau de variation de F sur $[s,+\infty[$:

x	s		$+\infty$
F	0	$\nearrow$	1

L'allure de la courbe représentative de la fonction F sur $\mathbb{R}$:



4. a) D'après la question **3.**, F est une fonction continue strictement croissante sur $[s,+\infty[$. Comme $F(s)=0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)=1$, alors f est bien une bijection de $[s,+\infty[$ vers $[0,1[$: chaque élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent dans l'ensemble de départ.

   b) Soit $y\in[0,1[$. Alors

$$0\leqslant y<1 \iff 0<1-y\leqslant 1 \iff \frac{1}{1-y}\geqslant 1 \iff \sqrt{\frac{1}{1-y}}\geqslant 1.$$

   Puis en multipliant par $s>0$, j'obtiens que $s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}\geqslant s$, *i.e.*

$$\forall y\in[0,1[,\quad G(y)\in[s,+\infty[.$$

   c) Soit $y\in[0,1[$. Comme $G(y)\in[s,+\infty[$, alors je peux lui appliquer la fonction F. J'obtiens alors

$$F\big(G(y)\big)=1-\left(\frac{s}{s\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2=1-\left(\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{1-y}}}\right)^2=1-\frac{1}{\frac{1}{1-y}}=1-\big(1-y\big)=y.$$

   J'ai bien montré que la fonction G est la bijection réciproque de la fonction F, *i.e.*

$$\forall y\in[0,1[,\quad F\big(G(y)\big)=y.$$

5. a) La fonction de répartition d'une loi uniforme sur un intervalle $[a,b[$ est donnée par $F(x)=\dfrac{x-a}{b-a}$ sur l'intervalle $[a,b[$, $F(x)=0$ avant et $F(x)=1$ après. Donc la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $[0,1[$ est donnée par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\begin{cases}0 & \text{si } x<0,\\ x & \text{si } 0\leqslant x<1,\\ 1 & \text{si } x\geqslant 1.\end{cases}$$

b) Soit $x \geqslant s$. Par définition de V puis par croissance de la fonction F,

$$P\big(V \leqslant x\big) = P\big(G(U) \leqslant x\big) = P\Big(F\big(G(U)\big) \leqslant F(x)\Big).$$

Puis comme U suit une loi uniforme sur $[0,1[$, U prend ses valeurs dans l'intervalle $[0,1[$ donc $F\big(G(U)\big) = U$. Et puisque $x \geqslant s$, alors $F(x) \in [0,1[$.
Donc d'après la formule de la fonction de répartition de U,

$$\forall x \in [s,+\infty[, \quad P\big(V \leqslant x\big) = P\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x).$$

Pour $x < s$, comme $V = G(U)$, que U suit une loi uniforme sur $[0,1[$
et que $G\Big([0,1[\Big) \subset [s,+\infty[$, alors

$$\forall x \in]-\infty, s[, \quad P\big(V \leqslant x\big) = 0.$$

c) J'ai déterminé à la question précédente la fonction de répartition de la variable aléatoire V et obtenu la même expression que F, fonction de répartition de S. Comme la fonction de répartition détermine la loi, alors j'en déduis que V suit la même loi que S.

6. Voici la fonction `Python` complétée :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd

def S(s):
    U=rd.random()
    S=s*np.sqrt(1/(1-U))
    return(S)
```

7. La variable aléatoire S admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$
   Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale sur le segment $[s, M]$:

$$\int_{s}^{M} x f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \left[-\frac{1}{x}\right]_{s}^{M} = 2s^2 \times \left(-\frac{1}{M} + \frac{1}{s}\right) = 2s - \frac{2s^2}{M}.$$

   Puis comme $\displaystyle\lim_{M\to+\infty} 2s - \frac{2s^2}{M} = 2s - 0 = 2s$, alors j'en déduis que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut $2s$.

Alors grâce à la relation de Chasles, l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x f(x)\,\mathrm{d}x + \int_{s}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 2s = 2s.$$

Finalement la variable aléatoire S admet bien une espérance et $\quad E(S) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x f(x)\,\mathrm{d}x = 2s.$

8. La variable aléatoire S admet une variance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ converge.
   Je calcule séparément les deux intégrales suivantes :
   - $\int_{-\infty}^{s} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} x^2 \times 0\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{s} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   - $\int_{s}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{s}^{+\infty} \frac{2s^2}{x}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x.$
     Soit $M \geqslant s$. Je calcule l'intégrale sur le segment $[s, M]$:
     $$\int_{s}^{M} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \int_{s}^{M} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = 2s^2 \times \Big[\ln(x)\Big]_{s}^{M} = 2s^2 \times \big(\ln(M) - \ln(s)\big).$$
     Or $\lim\limits_{M\to+\infty} \ln(M) = +\infty$ donc $\lim\limits_{M\to+\infty} \int_{s}^{M} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x = +\infty$ et j'en déduis que l'intégrale impropre $\int_{s}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.

   Donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\,\mathrm{d}x$ diverge et la variable aléatoire S n'admet pas de variance.

9. Je cherche $P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right)$.
   En passant par l'événement contraire et par définition de la fonction de répartition,
   $$P\left(S \geqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - P\left(S \leqslant \frac{3}{2}s\right) = 1 - F\left(\frac{3}{2}s\right) = 1 - \left(1 - \left(\frac{s}{\frac{3}{2}s}\right)^2\right) = \left(\frac{1}{\frac{3}{2}}\right)^2 = \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{4}{9}.$$

10. Les n salariés représentent n répétitions identiques et indépendantes de l'épreuve de Bernoulli de succès "le salarié a un salaire horaire d'au moins $\frac{3}{2}s$", de probabilité $p = \frac{4}{9}$.
    La variable aléatoire N_n compte le nombre de succès, donc N_n suit une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{4}{9}$.

11. Comme N_n suit une loi binomiale, alors
    $$E(N_n) = np = n \times \frac{4}{9} = \frac{4n}{9} \quad \text{et} \quad V(N_n) = np(1-p)\frac{4n}{9} \times \frac{5}{9} = \frac{20n}{81}.$$

12. Je cherche $P\big(N_n \leqslant 2\big)$. En décomposant en événements disjoints, j'obtiens que
    $$P\big(N_n \leqslant 2\big) = P\big(N_n = 0\big) + P\big(N_n = 1\big) + P\big(N_n = 2\big).$$
    Et comme N_n suit une loi binomiale, alors $\forall k \in \{0,1,2\}$, $P\big(N_n = k\big) = \binom{k}{n} \times p^k \times (1-p)^{n-k}$.
    D'où
    $$\begin{aligned} P\big(N_n \leqslant 2\big) &= P\big(N_n = 0\big) + P\big(N_n = 1\big) + P\big(N_n = 2\big) \\ &= 1 \times \left(\frac{4}{9}\right)^0 \times \left(\frac{5}{9}\right)^n + n \times \left(\frac{4}{9}\right)^1 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-1} + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2 \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\ &= \left(\left(\frac{5}{9}\right)^2 + n \times \frac{4}{9} \times \frac{5}{9} + \frac{n(n-1)}{2} \times \left(\frac{4}{9}\right)^2\right) \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\ &= \frac{25 + 20n + 8n(n-1)}{9^2} \times \left(\frac{5}{9}\right)^{n-2} \\ &= \frac{\big(8n^2 - 12n + 25\big) \times 5^{n-2}}{9^n}. \end{aligned}$$

13. a) Comme chacune des variables aléatoires S_k suit la même loi que S pour $1 \leqslant k \leqslant n$, alors j'en déduis que

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad E(S_k) = E(S) = 2s.$$

Alors par linéarité de l'espérance,

$$\begin{aligned} E\big(M_n\big) &= E\left(\frac{1}{2n}\sum_{k=1}^{n} S_k\right) = \frac{1}{2n} \times E\left(\sum_{k=1}^{n} S_k\right) = \frac{1}{2n} \times \sum_{k=1}^{n} E(S_k) \\ &= \frac{1}{2n} \times \sum_{k=1}^{n} 2s = \frac{1}{2n} \times n \times 2s = \frac{1}{2} \times 2s = s. \end{aligned}$$

b) Dans le vecteur `F` sont stockées toutes les valeurs des M_k pour k allant de 1 à $n = 1000$.

c) Les courbes obtenues sont différentes puisque les salariés distincts observés ne sont pas les mêmes. En revanche, on remarque bien que pour les quatre courbes, les valeurs se rapprochent (plus ou moins rapidement) de la valeur s contenue dans le vecteur `L`, représentée par la portion de droite horizontale. Ceci est une illustration de la loi des grands nombres : la valeur limite de M_n en $+\infty$ est égale à l'espérance s.