ecricome

SUJET ZÉRO

MATHÉMATIQUES
VOIE TECHNOLOGIQUE

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques voie technologique - Sujet zéro 1

Exercice 1

Partie A

On considère les matrices carrées d'ordre 3 suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On note également $V_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $V_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $V_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

1. Montrer que V_1, V_2 et V_3 sont des vecteurs propres de M et préciser leur valeur propre associée.
2. Justifier que la matrice P est inversible et déterminer P^{-1}.
3. (a) Établir l'existence d'une matrice diagonale D que l'on précisera, telle que $D = P^{-1}MP$.

   (b) Montrer en raisonnant par récurrence que :

$$\forall n \in \mathbb{N},\ M^n = PD^nP^{-1}.$$

4. Pour tout entier naturel n, expliciter la matrice D^n, puis montrer que :

$$M^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & \left(\frac{1}{2}\right)^n & \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} - 2\left(\frac{1}{3}\right)^n \\ 0 & 0 & \left(\frac{1}{3}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Partie B

Une puce se déplace sur un escalier de trois marches dont les marches sont notés M_0 pour la plus basse, M_1 pour celle du milieu et M_2 pour la marche la plus haute, selon les règles suivantes :

- À l'instant initial 0, elle est sur la marche la plus haute M_2.
- Si elle est sur la marche M_2 à l'instant n, elle est à l'instant $n+1$ de façon équiprobable sur l'une des trois marches M_0, M_1 ou M_2 (elle peut donc en particulier rester sur la marche M_2).
- Si elle est sur la marche M_1 à l'instant n, elle est à l'instant $n+1$ de façon équiprobable sur l'une des deux marches M_0 ou M_1 (elle ne peut pas remonter sur la marche M_2)
- Si elle est sur la marche M_0 à l'instant n, elle reste à l'instant $n+1$ sur la marche M_0 (elle ne peut pas remonter sur une des autres marches).

Pour tout entier naturel n, on désigne par X_n la variable aléatoire indiquant la hauteur de la marche où se trouve la puce à l'instant n. Ainsi, par exemple, $(X_n = 1)$ désigne l'événement : « la puce se trouve sur la marche M_1 à l'instant n ».
On note $E(X_n)$ l'espérance de la variable aléatoire X_n.

5. (a) Exprimer, pour tout entier naturel n, à l'aide de la formule des probabilités totales, les probabilités $P(X_{n+1} = 0)$, $P(X_{n+1} = 1)$ et $P(X_{n+1} = 2)$ en fonction des probabilités $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

(b) En déduire que pour tout entier naturel n, $U_{n+1} = MU_n$, où $U_n = \begin{pmatrix} P(X_n = 0) \\ P(X_n = 1) \\ P(X_n = 2) \end{pmatrix}$ et M est la matrice définie en **partie A.**

(c) Préciser U_0 et exprimer sans démonstration pour tout entier naturel n, U_n en fonction de M^n et U_0.

(d) En déduire pour tout entier naturel n l'expression de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

(e) Déterminer quand n tend vers $+\infty$ les limites de $P(X_n = 0)$, $P(X_n = 1)$ et $P(X_n = 2)$.

6. Déterminer pour tout entier naturel n l'espérance $E(X_n)$ et sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.

7. On considère le script Python ci-dessous :

```
import numpy as np
M=np.array([[1,1/2,1/3],[0,1/2,1/3],[0,0,1/3]])
U=np.array([[0],[0],[1]])
n=0
while U[0]<0.999:
    n+=1
    U=np.dot(M,U)
print(n)
```

Que permet de calculer ce script ?
On rappelle que la commande `np.dot` *effectue le produit entre deux matrices.*

8. On appelle T la variable aléatoire qui vaut n si la puce atteint la marche M_0 pour la première fois à l'instant n.

(a) Préciser l'ensemble des valeurs prises par T.

(b) On suppose avoir importé la librairie Python `numpy.random` sous l'abréviation `rd`.
Expliquer le fonctionnement de l'instruction Python `floor(rd.random()*(A+1))` où `A` désigne un nombre entier naturel fixé.

(c) On souhaite simuler une réalisation de T.
Recopier et compléter le script Python ci-dessous pour que la fonction `simulT` convienne.

```
import numpy.random as rd
def simulT():
    A=2
    n=0
    while A .........
        n = .........
        A = np.floor(rd.random()*(A+1))
    return .........
```

(d) On exécute le script Python ci-dessous :

```
esp = 0
for i in range(10000):
    esp = esp + simulT()/10000
print(esp)
```

La console affiche `2.4952`. Interpréter le résultat dans le contexte de l'énoncé.

Exercice 2

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par :

$$u_1 = \frac{2}{3} \text{ et, } \forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{n+1}{3n} u_n.$$

1. (a) Calculer u_2 et u_3.
   Les résultats seront donnés sous forme de fractions irréductibles.

   (b) Compléter la fonction Python ci-dessous qui prend en entrée la valeur n et renvoie la valeur de u_n.

```
def suite(n):
    u= 2/3
    for k in range(1,n-1):
        u = .........
    return u
```

2. Montrer par récurrence que,

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ u_n > 0.$$

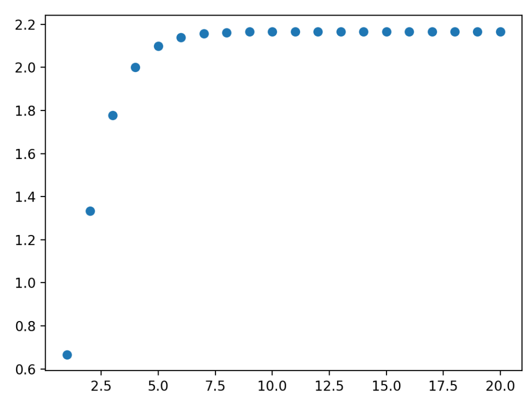
3. (a) Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

   (b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente vers un réel ℓ que l'on ne demande pas de calculer ici.

4. Le script Python ci-dessus introduit les variables `z` et `y`.

```
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
n=20
x=[k for k in range(1,n+1)]
y=[suite(k) for k in x]
z=np.cumsum(y)
plt.plot(x,z,'o')
plt.show()
```

Après l'exécution de ce script, le graphique suivant apparaît :



   (a) Expliquer le rôle des variables `y` et `z`.

   (b) Que peut-on conjecturer à propos de la série $\sum_{n\geqslant 1} u_n$?

5. On pose pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $v_n = \dfrac{u_n}{n}$.

   (a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.

   (b) En déduire pour tout entier n non nul, l'expression de v_n en fonction de n.

   (c) Vérifier que la série $\sum_{n\geqslant 1} v_n$ converge et montrer que $\sum_{n=1}^{+\infty} v_n = 1$.

6. Soit X une variable aléatoire discrète telle que $X(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout n entier naturel non nul, $P(X = n) = v_n$.
   (a) Reconnaître la loi de X puis calculer son espérance $E(X)$.
   (b) En déduire sans nouveau calcul que la série $\sum_{n \geqslant 1} u_n$ converge et donner la valeur de sa somme.
   (c) Quelle est la limite de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$?

Exercice 3

On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g(x) = xe^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

On note $\mathscr{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

1. Montrer que la fonction g est impaire.
   Interpréter graphiquement votre résultat.
2. Déterminer les limites de g en $+\infty$ et en $-\infty$.
   Interpréter graphiquement votre résultat.
3. (a) Montrer que pour tout réel x, on a : $g'(x) = \left(1 - x^2\right) e^{-\frac{1}{2}x^2}$.
   (b) Étudier le signe de $g'(x)$ pour tout réel x.
   (c) Dresser le tableau de variation de g sur $\mathbb{R}$.
4. Tracer l'allure de $\mathscr{C}_g$.
   On donne $\dfrac{1}{\sqrt{e}} \approx 0,6$.
5. Soit A un réel strictement positif. On pose : $I(A) = \displaystyle\int_0^A xe^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$.
   Montrer que : $I(A) = 1 - e^{-\frac{1}{2}A^2}$.
6. On considère à présent la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} g(x) & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

   Montrer que la fonction f est une densité de probabilité.

Dans toute la suite, X désigne une variable aléatoire de densité f.

7. (a) Déterminer la fonction de répartition F de la variable aléatoire X.
   (b) Calculer la probabilité $P(1 \leqslant X \leqslant 2)$.
8. On rappelle que la densité usuelle de la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$ est la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2}.$$

   (a) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$, puis justifier que $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{2\pi}}{2}$.
   (b) Soit $A > 0$. On pose : $J(A) = \displaystyle\int_0^A x^2 e^{-\frac{1}{2}x^2}\ \mathrm{d}x$.
   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que : $J(A) = -Ae^{-\frac{1}{2}A^2} + \displaystyle\int_0^A e^{-\frac{1}{2}x^2} \mathrm{d}x$.
   (c) En déduire que l'espérance $E(X)$ existe et déterminer sa valeur.

9. On pose $Y = X^2$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.
   (a) Déterminer pour tout réel x le nombre $G(x)$.
   (b) En déduire que Y suit la loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$, puis déterminer son espérance et sa variance.
   On **admet** que réciproquement si Y est une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$ alors la variable aléatoire $X = \sqrt{Y}$ admet pour densité la fonction g.
   (c) On rappelle que dans la librairie `numpy.random` importée ici sous l'abréviation `rd`, se trouve la commande `rd.expomential(alpha,(1,n))` qui simule n fois une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{\texttt{alpha}}$ et stocke les n réalisations ainsi obtenues dans une matrice ligne contenant n colonnes.
   Donner un script Python permettant de simuler 10 fois la variable aléatoire Y.
   (d) En déduire un script Python permettant de simuler 10 fois la loi de X.