SUJET ZÉRO n°2

MATHÉMATIQUES
VOIE TECHNOLOGIQUE

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques Voie Technologique - Sujet zéro 2

EXERCICE 1

Dans tout l'exercice, a désigne un réel strictement positif fixé.

Partie A

On considère la fonction définie sur $]0, +\infty[$ par :

$$\forall x \in]0, +\infty[, \quad f(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{a}{x}\right).$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f.

1. (a) Calculer $f(\sqrt{a})$.
   (b) Résoudre l'équation $f(x) = x$, d'inconnue x réel strictement positif.
2. (a) Déterminer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0^+. Interpréter graphiquement le résultat.
   (b) Déterminer les limites de $f(x)$ et de $f(x) - \dfrac{x}{2}$ lorsque x tend vers $+\infty$.
   Interpréter graphiquement le résultat.
3. (a) Calculer $f'(x)$ pour tout réel x strictement positif.
   (b) En déduire que f est décroissante sur $]0, \sqrt{a}]$ et croissante sur $[\sqrt{a}, +\infty[$.
   (c) La courbe $\mathscr{C}_f$ admet-elle des tangentes horizontales ?
4. Tracer dans un même repère la droite d'équation $y = x$ ainsi que l'allure de la courbe $\mathscr{C}_f$ dans le cas où $a = 1$.
   On prendra soin de faire apparaître les éléments mis en valeur dans les questions 1, 2 et 3.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définie par :

$$u_0 = 1 \qquad \text{et} \qquad \forall n \in \mathbf{N},\ u_{n+1} = \frac{1}{2}\left(u_n + \frac{a}{u_n}\right).$$

On admet que cette suite est ainsi bien définie.

5. Démontrer par récurrence que : $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$.
6. (a) En utilisant l'étude de la fonction f faite en Partie A, montrer que :
   $$\forall n \in \mathbf{N}, \quad u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}.$$
   (b) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}^*}$ est décroissante.
   (c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est convergente. On notera ℓ sa limite.
   (d) En remarquant que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right)$, déterminer une équation vérifiée par le réel ℓ, puis la valeur de ℓ.
7. (a) Montrer que pour tout entier naturel n non nul : $0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant u_n - u_{n+1}$.
   (b) En déduire que s'il existe un entier naturel n non nul tel que $u_n - u_{n+1} \leqslant 10^{-5}$, alors u_{n+1} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.
8. Dans cette question, on suppose que $a = 3$.

   (a) Recopier et compléter la fonction Python suivante prenant en argument d'entrée un entier n, et renvoyant la valeur de u_n.

```
def suite(n):
  u = ..........
  for k in range(1,n+1):
      u = ..........
  return ..........
```

(b) On considère la fonction Python `mystere` suivante :

```
def mystere():
    n=0
    u=suite(0)
    v=suite(1)
    while u-v > 10**(-5)  :
        n=n+1
        u=suite(n)
        v=suite(n+1)
    return v
```

Que renvoie cette fonction ? Expliquer votre réponse à l'aide des questions précédentes.

EXERCICE 2

Partie A

On note I_3 la matrice identité de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, définie par $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$.

   (a) Déterminer $(I_3)^2$ et A^2.

   (b) En déduire que l'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, admet au moins quatre solutions.

2. Soit λ un réel strictement positif.

   On définit les matrices N et T par : $N = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ et $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$

   (a) Vérifier que $N^2 = 0$.

   (b) Déterminer deux réels a et b tels que $T = aI_3 + bN$.

   (c) Soient x et y deux réels. On pose $M = xI_3 + yN$. Calculer M^2.

   (d) En déduire que l'équation $M^2 = T$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, admet exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Partie B

On note $B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $D = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

3. Vérifier que les vecteurs $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, $X_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $X_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice B, et préciser pour chacun la valeur propre associée.

4. On considère le script Python suivant :

```
import numpy as np
I=np.eye(3)
B=np.array([[-1,4,-1],[-2,5,2],[0,0,-2]])
P=np.array([[1,2,1],[0,1,1],[1,0,0]])
Q=np.array([[0,0,1],[1,-1,-1],[-1,2,1]])
R=np.dot(P,Q)-I
S=np.dot(Q,np.dot(B,P))
print(R)
print(S)
```

À son exécution, on obtient

```
[[ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]
 [ 0.  0.  0.]]
[[-2  0  0]
 [ 0  1  0]
 [ 0  0  3]].
```

Que peut-on en conjecturer sur la matrice P ? sur la matrice D ?

5. On suppose qu'il existe une matrice M de $\mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ telle que $M^2 = D$ et on note $V = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$
   (a) Justifier que $DM = MD$.
   (b) Justifier que $DMV = -2MV$.
   (c) On note $MV = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.
   Montrer que $-2b = b$ et que $-2c = 3c$.
   En déduire que $MV = aV$.
   (d) Calculer M^2V de deux manières différentes et aboutir à une contradiction.
6. Que peut-on conclure sur l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$?
7. On admet les conjectures effectuées à la question 4.
   (a) Montrer que si une matrice M vérifie l'équation $M^2 = B$, alors on a $(QMP)^2 = D$.
   (b) Que peut-on en conclure sur l'équation $M^2 = B$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$?

EXERCICE 3

Partie A

Une agence de voyage propose deux formules à sa clientèle : une formule hôtel comprenant transport et hébergement, et une formule club comprenant transport, hébergement, circuit et animation.
Une étude montre que 50% des clients choisissent la formule hôtel et 50% choisissent la formule club.
D'autre part, parmi les clients ayant choisi la formule hôtel, 20% effectuent leur voyage en France et 80% à l'étranger.
Enfin, parmi ceux ayant choisi la formule club, 40% effectuent leur voyage en France et 60% à l'étranger.

Soit H : « le client choisit la formule hôtel » et C : « le client choisit la formule club ».
Soit E : « le client fait un voyage à l'étranger ».

1. Un client se présente à l'agence.
   (a) Montrer que la probabilité qu'il choisisse un voyage à l'étranger est égale à $\dfrac{7}{10}$.
   (b) Le client demande un voyage à l'étranger. Calculer la probabilité qu'il prenne la formule club.
2. Dix clients se présentent à l'agence. Soit T le nombre de clients faisant un voyage à l'étranger.
   (a) Déterminer la loi de T et préciser son ou ses paramètres. Calculer son espérance et sa variance.
   (b) Écrire une fonction Python `T` renvoyant une simulation de la variable aléatoire T.

Partie B

Le forfait d'un voyage, en **centaines d'euros**, versé à l'agence par un client, définit une variable aléatoire X.
Des études antérieures ont permis d'établir que $X = 2 + \frac{1}{2}Y$, où Y est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est définie par :

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ 1 - \dfrac{x+6}{6}e^{-\frac{x}{6}} & \text{si } x > 0 \end{cases}.$$

3. Calculer la probabilité que le forfait ne dépasse pas 5 centaines d'euros.

4. (a) Montrer que pour tout réel $x > 0$: $F'(x) = \dfrac{x}{36}e^{-\frac{x}{6}}$.
   (b) Déterminer une densité de probabilité f de la variable aléatoire Y.
   (c) Vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

5. (a) Soit $A > 0$. On pose : $I(A) = \displaystyle\int_0^A x^2 e^{-\frac{x}{6}}\,\mathrm{d}x$.
   À l'aide d'une intégration par parties, montrer que :
   $$I(A) = -6A^2 e^{-\frac{A}{6}} + 12\int_0^A 36 f(x)\,\mathrm{d}x.$$
   (b) En déduire que l'espérance de la variable aléatoire Y existe et que : $E(Y) = 12$.
   (c) Quel est le prix moyen du forfait ?

6. Déterminer la fonction de répartition de la variable aléatoire X.