CORRIGÉ
DU SUJET ZÉRO n°2

MATHÉMATIQUES
VOIE TECHNOLOGIQUE

CONCOURS ECRICOME PRÉPA 2023

Mathématiques Voie Technologique - Sujet zéro 2 - Corrigé

EXERCICE 1

Partie A

1. (a)

$$f(\sqrt{a}) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{a} + \frac{a}{\sqrt{a}}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\sqrt{a} + \sqrt{a}\Big) = \sqrt{a}$$

$\boxed{\text{Ainsi, } f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}}$.

On attend des candidats qu'ils donnent l'expression la plus simple possible, et en particulier simplifient $\dfrac{a}{\sqrt{a}}$.

(b) Soit x un réel strictement positif.

$$f(x) = x \iff \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) = x \iff \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x}\Big) - x = 0 \iff \frac{1}{2}\Big(x + \frac{a}{x} - 2x\Big) = 0$$
$$\iff \frac{a}{x} - x = 0 \iff \frac{a - x^2}{x} = 0 \iff x^2 = a \iff x = \sqrt{a} \text{ ou } x = -\sqrt{a}$$

Or $-\sqrt{a}$ est exclu car on résout l'équation dans $\mathbf{R}_+^*$.

$\boxed{\text{Finalement, l'unique solution de l'équation } f(x) = x \text{ dans } \mathbf{R}_+^* \text{ est } x = \sqrt{a}}$.

Un candidat qui précise que $x > 0$ dans cette question peut directement affirmer que $x^2 = a \iff x = \sqrt{a}$.

2. (a) $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{a}{x} = +\infty$ car $a > 0$. $\boxed{\text{Donc par somme, } \lim\limits_{x \to 0^+} f(x) = +\infty}$.

$\boxed{\text{On en déduit que la courbe } \mathscr{C}_f \text{ admet une asymptote verticale d'équation } x = 0}$.

(b) $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{x} = 0$ donc par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} f(x) = +\infty}$.

Pour tout réel $x > 0$, $f(x) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{1}{2}\Big(x + \dfrac{a}{x}\Big) - \dfrac{x}{2} = \dfrac{a}{2x}$.

Or $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{a}{2x} = 0$. $\boxed{\text{D'où } \lim\limits_{x \to +\infty} f(x) - \dfrac{x}{2} = 0}$.

$\boxed{\text{On en déduit que la droite d'équation } y = \dfrac{x}{2} \text{ est asymptote oblique à la courbe en } +\infty}$.

3. (a) f est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$ et pour tout réel x strictement positif, on a :

$$\boxed{f'(x) = \frac{1}{2}\Big(1 - \frac{a}{x^2}\Big) = \frac{1}{2}\Big(\frac{x^2 - a}{x^2}\Big)}$$

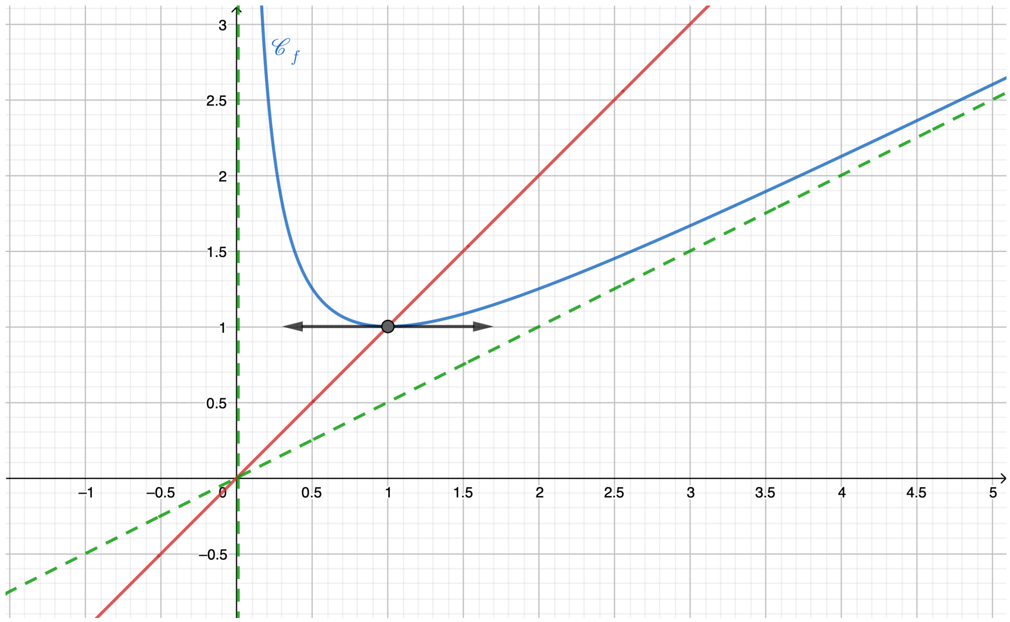
(b) Soit $x > 0$. On a $x^2 - a = (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a})$. Donc $x^2 - a \geqslant 0 \iff x \geqslant \sqrt{a}$.

$\boxed{\text{On en déduit que } f \text{ est décroissante sur }]0; \sqrt{a}] \text{ et croissante sur } [\sqrt{a}; +\infty[.}$

Les candidats peuvent conclure en donnant le tableau de variations de f.

(c) Soit $x > 0$. $f'(x) = 0 \iff x^2 - a = 0 \iff (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) \iff x = \sqrt{a}$.
La dérivée s'annule en $x = \sqrt{a}$. Or on a $f(\sqrt{a}) = \sqrt{a}$.
La droite d'équation $y = \sqrt{a}$ est l'unique tangente horizontale à la courbe, tangente en $x = \sqrt{a}$.

4. Ici, on représente la fonction pour $a = 1$. Le minimum est atteint au point $(1, 1)$, seul point où il y a une tangente horizontale, et seule intersection avec la droite d'équation $y = x$.



Un tracé propre et clair est attendu des candidats.

Partie B

5. **Initialisation** Par définition de la suite, $u_0 = 1$. Or $1 > 0$. Donc $u_0 > 0$.

   Hérédité Soit $n \in \mathbf{N}$. Supposons $u_n > 0$ et démontrons que $u_{n+1} > 0$.

   Par définition de la suite, $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

   Or, par hypothèse de récurrence, $u_n > 0$, et par énoncé, $a > 0$.

   On a donc par somme de termes strictement positifs, $u_n + \dfrac{a}{u_n} > 0$, d'où $u_{n+1} > 0$.

   Ainsi, par récurrence que $\forall n \in \mathbf{N}, u_n > 0$.

La rédaction correcte de la récurrence est un attendu dans la correction.

6. (a) Soit n un entier naturel.

   On remarque que $u_{n+1} = f(u_n)$.

   D'après l'étude des variations de la fonction f, $\forall x \in]0, +\infty[$, $f(x) \geqslant \sqrt{a}$.

   Or $u_n > 0$. Donc $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$.

   Ainsi, $\forall n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = f(u_n) \geqslant \sqrt{a}$.

Une démonstration par récurrence est acceptée, mais un peu longue dans la résolution.

   (b) Soit $n \in \mathbf{N}^*$. $u_{n+1} - u_n = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) - u_n = \dfrac{1}{2}\left(-u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{-u_n^2 + a}{u_n}\right)$.

   Or $u_n \geqslant \sqrt{a}$ par question précédente, donc $u_n^2 \geqslant a$. De plus, $u_n > 0$ par question 5.

   D'où $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

   Ainsi la suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}^*}$ est décroissante.

   (c) La suite $(u_n)_{n \in \mathbf{N}}$ est décroissante (question précédente) et minorée par 0 (question 5).

   Par le théorème de la limite monotone, elle est donc convergente.

   (d) Comme $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n = \ell$, on a $\lim\limits_{n \to +\infty} u_{n+1} = \ell$ et que $\lim\limits_{n \to +\infty} \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right) = \dfrac{1}{2}\left(\ell + \dfrac{a}{\ell}\right)$ (on a bien $\ell \neq 0$ car comme $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_n \geqslant \sqrt{a}$, par passage à la limite, $u_n \geqslant \sqrt{a} > 0$).

   Par définition de la suite, $\forall n \in \mathbf{N}^*, u_{n+1} = \dfrac{1}{2}\left(u_n + \dfrac{a}{u_n}\right)$.

Par unicité de la limite, on a donc : $\ell = \frac{1}{2}\left(\ell + \frac{a}{\ell}\right) = f(\ell)$.
Or on a montré à la question 1(b) que l'équation $f(x) = x$ admet pour unique solution dans $\mathbf{R}_+^*$ $x = \sqrt{a}$.

Donc $\ell = \sqrt{a}$.

7. (a) Soit $n \in \mathbf{N}^*$.
D'après la question 6.(a), $u_{n+1} \geqslant \sqrt{a}$ et d'après la question précédente $\ell = \sqrt{a}$, donc $0 \leqslant u_{n+1} - \ell$.
D'autre part, $\ell \leqslant u_n$, donc $\ell - u_{n+1} \leqslant u_n - u_{n+1}$.

Finalement, $0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant u_n - u_{n+1}$.

(b) Supposons qu'il existe un entier naturel n non nul tel que $u_n - u_{n+1} \leqslant 10^{-5}$.
Alors, d'après la question précédente, on a :

$$0 \leqslant \ell - u_{n+1} \leqslant u_n - u_{n+1} \leqslant 10^{-5}$$

D'où $|u_{n+1} - \ell| \leqslant 10^{-5}$. C'est dire que u_{n+1} est une valeur approchée de ℓ à 10^{-5} près.

8. (a)
```
def suite(n):
    u = 1
    for k in range(1,n+1):
        u = 1/2*(u+a/u)
    return u
```

(b) La fonction `mystere` renvoie u_{n+1} pour n tel que $u_n - u_{n+1} \leqslant 10^{-5}$, c'est-à-dire elle renvoie une valeur approchée de $\ell = \sqrt{a}$ à 10^{-5} près.

EXERCICE 2

Partie A

1. (a) On a $(I_3)^2 = I_3$, et $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$.

Ainsi $(I_3)^2 = A^2 = I_3$.

(b) On en déduit les quatre égalités suivantes :

$$(I_3)^2 = I_3, \quad (-I_3)^2 = (-1)^2 I_3^2 = I_3^2, \quad A^2 = I_3 \quad \text{et} \quad (-A)^2 = (-1)^2 A^2 = I_3$$

L'équation $M^2 = I_3$, d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$, admet donc au moins quatre solutions : $I_3, (-I_3), A, (-A)$.

2. (a) On a : $N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Ainsi $N^2 = 0$

Les détails de calcul ne sont pas attendus.

(b) On a $T = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \lambda I_3 + N$.

Ainsi $T = \lambda I_3 + N$.

(c) Comme I_3 et N commutent, on a :

$$M^2 = (xI_3 + yN) \cdot (xI_3 + yN) = (xI_3)^2 + 2(xI_3)(yN) + (yN)^2 = x^2 I_3 + 2xyN$$

Donc $M^2 = x^2 I_3 + 2xyN$.

(d) Soient x et y deux réels et $M = xI_3 + yN$.

$$\begin{aligned}
M^2 = T &\iff x^2 I_3 + 2xyN = aI_3 + bN \\
&\iff \begin{pmatrix} x^2 & 2xy & 0 \\ 0 & x^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix} \\
&\iff \begin{cases} x^2 = \lambda \\ 2xy = 1 \end{cases} \\
&\iff \begin{cases} x = \sqrt{\lambda} \\ y = \dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} \end{cases} \text{ ou } \begin{cases} x = -\sqrt{\lambda} \\ y = -\dfrac{1}{2\sqrt{\lambda}} \end{cases} \\
&\iff M = \sqrt{\lambda} I_3 + \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} N \text{ ou } M = -\sqrt{\lambda} I_3 - \frac{1}{2\sqrt{\lambda}} N
\end{aligned}$$

Finalement, l'équation $M^2 = T$ admet bien exactement deux solutions dans l'ensemble des matrices qui s'écrivent sous la forme $xI_3 + yN$ avec x, y deux réels.

Partie B

3. ◇ On a $X_1 \neq 0$ et $BX_1 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = -2X_1$.

   X_1 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre -2.

   ◇ $X_2 \neq 0$ et $BX_2 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = X_2$.

   X_2 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre 1.

   ◇ $X_3 \neq 0$ et $BX_3 = \begin{pmatrix} -1 & 4 & -1 \\ -2 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3X_3$.

   X_3 est donc vecteur propre de B associé à la valeur propre 3.

4. La ligne 6 du script Python calcule la matrice $R = PQ - I_3$ et le résultat obtenu (affiché grâce à la ligne 8) donne la matrice nulle. On peut conjecturer que $PQ = I_3$, c'est-à-dire que P est inversible et $P^{-1} = Q$.
   La ligne 7 du script Python calcule le produit matriciel $S = QBP$ et le résultat obtenu (affiché grâce à la ligne 9) donne la matrice diagonale D. On peut donc conjecturer que $QBP = P^{-1}BP = D$, et que B est diagonalisable.

5. (a) $DM = M^2 M$ par hypothèse
   Donc $DM = M^3 = MM^2 = MD$. Ainsi $DM = MD$.

   (b) On a : $DMV = MDV$ par question 5(a).
   Or $DV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} V = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = -2V$
   D'où $DMV = MDV = M(-2V) = -2MV$.
   Ainsi $DMV = -2MV$.

   (c) D'une part, $DMV = \begin{pmatrix} -2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2a \\ b \\ 3c \end{pmatrix}$. D'autre part, $-2V = \begin{pmatrix} -2a \\ -2b \\ -2c \end{pmatrix}$.
   Or, par question 5(b), $DMV = -2MV$, d'où les trois égalités : $-2a = -2a$, $b = -2b$ et $3c = -2c$.
   L'équation $b = -2b$ donne $b = 0$ et l'équation $3c = -2c$ donne $c = 0$.

   On en déduit donc que $MV = \begin{pmatrix} a \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = aV$.

(d) D'une part, $M^2V = MMV = M(aV) = aMV = a^2MV$.
D'autre part, $M^2V = DV = -2V$ car M est solution de l'équation $M^2 = D$ et par question 5(b).
On en déduit donc que $a^2V = -2V$ d'où $a^2 = -2$ (car $V \neq 0$). Or c'est impossible puisque $\forall x \in \mathbb{R}, x^2 \geqslant 0$.

6. On a ainsi démontré par l'absurde que l'équation $M^2 = D$ d'inconnue $M \in \mathscr{M}_3(\mathbf{R})$ n'admet aucune solution.

7. (a) Soit M une matrice qui vérifie l'équation $M^2 = B$.
Alors, en admettant les deux conjectures $Q = P^{-1}$ et $QBP = D$, on a :

$$(QMP)^2 = QMPQMP = P^{-1}MPP^{-1}MP = P^{-1}BP = D$$

On a donc bien $(QMP)^2 = D$.

(b) Supposons que l'équation $M^2 = B$ admette une solution notée M_1.
Alors on a $(QM_1P)^2 = D$, c'est-à-dire QM_1P solution de l'équation $M^2 = D$.
Or d'après la question 6, cette équation n'admet pas de solution.
Donc l'équation $M^2 = B$ n'admet pas non plus de solution.

EXERCICE 3

Partie A

1. (a) Comme (H, C) est un système complet d'événements, la formule des probabilités totales donne :

$$P(E) = P(H \cap E) + P(C \cap E) = P(H)P_H(E) + P(C)P_C(E) = \frac{1}{2} \cdot \frac{8}{10} + \frac{1}{2} \cdot \frac{6}{10} = \frac{7}{10}$$

Ainsi $P(E) = \dfrac{7}{10}$.

(b) On a : $P_E(C) = \dfrac{P(C \cap E)}{P(E)} = \dfrac{P(C)P_C(E)}{P(E)} = \dfrac{\frac{3}{10}}{\frac{7}{10}} = \dfrac{3}{7}$.

Ainsi $P_E(C) = \dfrac{3}{7}$.

2. (a) Pour chaque client, on a une épreuve de Bernoulli à deux issues : soit le voyage se déroule à l'étranger (ce qui correspond au « succès » E, avec une probabilité $p = \dfrac{7}{10}$), soit le voyage se déroule en France (ce qui correspond à l'« échec », avec une probabilité $1 - p$).
On reproduit 10 fois l'expérience pour les 10 clients, de manière indépendante et dans les mêmes conditions.
La variable aléatoire T compte le nombre de clients faisant un voyage à l'étranger, c'est-à-dire le nombre de succès.

Alors T suit une loi binomiale, de paramètres $n = 10$ et $p = \dfrac{7}{10}$.

On a

$$\forall k \in [\![0, 10]\!], P(T = k) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} \left(\frac{7}{10}\right)^k \left(\frac{3}{10}\right)^{n-k}$$

L'espérance et la variance sont données par :

$$E(T) = np = 7 \text{ et } \; V(T) = np(1-p) = \frac{21}{10}$$

La formule explicite de $P(T = k)$ n'est pas un attendu ici.

(b)

```
import numpy.random as rd
def T:
    return rd.binomial(10,7/10)
```

Les candidats peuvent bien entendu reprogrammer la fonction `binomial`.

Partie B

1. On a $P(X \leqslant 5) = P\left(2 + \frac{1}{2}Y \leqslant 5\right) = P(Y \leqslant 6) = F(6) = 1 - \frac{12}{6}e^{-1}$.

   Ainsi, le forfait ne dépasse pas 500 euros avec une probabilité de $1 - \frac{12}{6}e^{-1}$.

2. (a) La fonction F est dérivable sur $\mathbf{R}_+^*$.
   Pour $x > 0$, on a :
   $$F'(x) = 0 - \frac{1}{6}e^{-\frac{x}{6}} + \frac{1}{6}\frac{x+6}{6}e^{-\frac{x}{6}} = \frac{x}{36}e^{-\frac{x}{6}}$$

   (b) Une densité de probabilité f de la variable aléatoire Y est obtenue en dérivant sa fonction de répartition F là où elle est dérivable (et en donnant une valeur positive arbitraire là où elle ne l'est pas).

   Ainsi la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 0 \\ \frac{x}{36}e^{-\frac{x}{6}} & \text{si } x > 0 \end{cases}$ est une densité de Y.

   (c) La fonction f est nulle sur $]-\infty, 0]$. Donc $\int_{-\infty}^{0} f(x)\,dx$ converge et vaut 0.

   Soit $A > 0$. On a : $\int_0^A f(x)dx = \Big[F(x)\Big]_0^A = F(A) - F(0) = 1 - \frac{A+6}{6}e^{-\frac{A}{6}}$.

   Or $\lim_{A\to+\infty} -\frac{A}{6}e^{-\frac{A}{6}} = 0$ par croissances comparées, et $\lim_{A\to+\infty} e^{-\frac{A}{6}} = 0$. Donc $\int_0^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

   Finalement, $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$ converge et vaut 1.

   Un candidat utilisant une intégration par parties pour calculer l'intégrale $\int_0^A f(x)\mathrm{d}x$ n'est pas pénalisé.
   De même, un candidat utilisant directement les limites de la fonction de répartition F obtient tous les points.

3. (a) On effectue une intégration par parties en posant : $u'(x) = e^{-\frac{x}{6}}$, $v(x) = x^2$ d'où $u(x) = -6e^{-\frac{x}{6}}$ et $v'(x) = 2x$.

$$I(A) = \int_0^A x^2 e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x = \Big[-6e^{-\frac{x}{6}}x^2\Big]_0^A - \int_0^A -6e^{-\frac{x}{6}}\cdot 2x\mathrm{d}x = -6A^2e^{-\frac{A}{6}} + 12\int_0^A 36\cdot\frac{x}{36}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x = -6A^2e^{-\frac{A}{6}} + 12\int_0^A 36f(x)\mathrm{d}x$$

   On obtient bien que $I(A) = -6A^2e^{-A/6} + 12\int_0^A 36f(x)\,\mathrm{d}x$.

   (b) Y admet une espérance si et seulement si $\int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)\mathrm{d}x$ converge.

   Or, comme f est nulle sur $]-\infty, 0]$, $\int_{-\infty}^{0} xf(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
   Soit $A > 0$.
   $$\int_0^A xf(x)\mathrm{d}x = \int_0^A \frac{x^2}{36}e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x = \frac{1}{36}\int_0^A x^2e^{-\frac{x}{6}}\mathrm{d}x = \frac{1}{36}\Big(-6A^2e^{-\frac{A}{6}} + 12\int_0^A 36f(x)\mathrm{d}x\Big)$$

   Or, par croissances comparées, $\lim_{A\to+\infty} -6A^2e^{-\frac{A}{6}} = 0$.

   Et, par la question précédente, $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

   Donc Y admet une espérance et que $E(Y) = 12$.

(c) Le prix moyen du forfait est donné par $E(X)$.
Comme Y admet une espérance, X admet une espérance, et on a :

$$E(Y) = E\left(2 + \frac{1}{2}Y\right) = 2 + \frac{1}{2}E(Y) \quad \text{par linéarité de l'espérance.}$$

D'où $E(Y) = 2 + \dfrac{1}{2} \cdot 12 = 2 + 6 = 8$. En moyenne, le forfait du voyage est de 800 euros.

4. La fonction de répartition de la variable aléatoire X est donnée par :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ G(x) = P(X \leqslant x) = P\left(2 + \frac{1}{2}Y \leqslant x\right) = P(Y \leqslant 2x - 4) = \begin{cases} 0 & \text{si } 2x - 4 < 0 \\ F(2x - 4) & \text{si } 2x - 4 \geqslant 0 \end{cases}$$

D'où finalement,

$$G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{2x - 4 + 6}{6} e^{-\frac{2x-4}{6}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases} = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{x + 1}{3} e^{-\frac{x-2}{3}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$$

On a donc : $\forall x \in \mathbf{R},\ P(X \leqslant x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 2 \\ 1 - \dfrac{x + 1}{3} e^{-\frac{x-2}{3}} & \text{si } x \geqslant 2 \end{cases}$.