BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

FILIERE ECONOMIQUE ET COMMERCIALE

VOIE TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 2 mai 2023, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
*Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
*Aucun document n'est autorisé. **L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.** Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

EXERCICE 1

On considère la fonction polynôme P, de degré 3, donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

(1) Montrer que P s'annule pour $x = -1$.

(2) Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x+1)(ax^2 + bx + c)$.

(3) En déduire que P admet deux racines et les déterminer.

(4) Calculer, en les justifiant, les limites de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

(5) Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations en faisant figurer les limites calculées à la question (4).

(6) Montrer que la courbe représentative de P dans un repère orthonormé admet un point d'inflexion d'abscisse $\frac{1}{3}$.

(7) Calculer l'intégrale

$$I = \int_{-1}^{1} P(x)\ \mathrm{d}x.$$

(8) Dans un repère orthonormé d'unité 3 cm, tracer la représentation graphique de P en faisant figurer les tangentes horizontales et en hachurant la surface correspondant au calcul de I. Pour cela, on donne $P\left(-\frac{1}{3}\right) \approx 1,19$.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

Tournez la page S.V.P.

(9) Calculer l'image de 0 par f.

(10) Calculer, en les justifiant, les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.

(11) Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle s'annule en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.

(12) Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations en faisant figurer les limites calculées à la question (10) et l'image de 0 obtenue à la question (9).

(13) Déterminer le signe de $f\left(-\sqrt{3}\right)$ et celui de $f\left(\sqrt{3}\right)$.

(14) (a) Montrer que l'équation $f(x) = 0$, d'inconnue $x \in \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$, admet une unique solution α.

(b) Montrer que $\alpha < 0$.

(15) Donner l'équation de la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -1 et montrer qu'elle passe par $O = (0, 0)$, l'origine du repère.

(16) Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.

(a) Montrer que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

(b) En déduire que la tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si

$$P(x_0) = 0,$$

où P est la fonction polynôme étudiée au début de l'exercice.

(c) Conclure quant au nombre de tangentes à $\mathscr{C}_f$ passant par l'origine du repère.

EXERCICE 2

Dans son atelier, John von Neumann possède une machine permettant de créer, pour chaque nombre réel $p \in]0, 1[$, une pièce tombant sur PILE avec probabilité p. On nomme « pièce équilibrée », une pièce dont la probabilité de tomber sur PILE est $\frac{1}{2}$.

L'exercice est composé de trois parties **indépendantes**. Dans tout l'énoncé, on note $\mathbf{P}(A)$ la probabilité d'un évènement A.

Première partie

On considère un nombre réel $p \in]0, 1[$ et on utilise dans cette partie, une pièce de l'atelier de von Neumann ayant une probabilité p de tomber sur PILE.

(1) On lance successivement deux fois la pièce et on note à chaque fois le résultat (PILE ou FACE) obtenu.

(a) On note X la variable aléatoire égale au nombre de fois où on a obtenu PILE au cours de ces deux lancers. Reconnaître la loi de X et justifier votre réponse.

(b) Calculer la probabilité $\mathbf{P}(X = k)$ pour toutes les valeurs k prises par X. Montrer en particulier que $\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1 - p)$.

(2) Une *manche* consiste à lancer deux fois successivement la pièce et on nomme « succès » le fait d'obtenir deux résultats différents et « échec » celui d'obtenir deux résultats identiques.

Quel est la probabilité de « succès » de cette expérience de Bernoulli ?

(3) On répète indéfiniment des manches comme ci-dessus. Chaque manche est supposée indépendante des autres. On note N la variable aléatoire égale au nombre de manches effectuées jusqu'à l'obtention d'un premier succès.

(a) Dans le cas où les tirages successifs sont $PP, FF, PP, PP, FF, PF, FP, PP, \ldots$ (on a abrégé PILE en P et FACE en F), donner la valeur de N.

(b) Reconnaître la loi de N et donner l'expression de $\mathbf{P}(N = k)$ pour toutes les valeurs k prisent par N.

(c) Donner, si elles existent, l'espérance et la variance de N.

(4) Pour deux joueurs Alice et Bob souhaitant s'affronter, l'atelier de von Neumann conseille le jeu suivant : à l'aide d'une pièce de sa production, on réalise une manche comme ci-dessus puis une deuxième si la première manche est constituée de deux résultats identiques.

On déclare alors Alice gagnante si l'issue d'une des deux manches est PF et Bob est gagnant si l'issue d'une des deux manches est FP. Dans les autres cas, la partie est nulle.

Par exemple, si on lance la pièce et que l'on obtient la séquence suivante : FF, PF alors Alice est gagnante.

(a) Calculer, en fonction de p, la probabilité qu'Alice gagne lors de la première manche.

(b) Montrer que la probabilité qu'Alice gagne lors de la seconde manche (en particulier, aucun des deux joueurs ne remporte la première manche) est égale à

$$p(1 - p)\left(p^2 + (1 - p)^2\right).$$

(c) Expliquer pourquoi, quelle que soit la valeur du paramètre *p,* le jeu est équitable.

Deuxième partie

Dans cette partie de l'exercice, on considère une pièce équilibrée ($p = \frac{1}{2}$) que l'on lance successivement trois fois. On note S la variable aléatoire égale au nombre de PILE obtenus au cours de ces trois lancers. On note aussi T la variable aléatoire égale à 0 si on n'obtient aucun PILE lors des trois lancers et égale au rang du premier PILE obtenu si un PILE apparaît.
Par exemple, si une succession de trois lancers amène « FPF », on a $S = 1$ et $T = 2$.

(5) Le programme PYTHON ci-contre a pour objectif de simuler une succession de 3 lancers et d'afficher les valeurs prisent par S et T.

```
1 import numpy.random as rd
2 S=0
3 T=0
4 for k in range(1,4):
5   r=rd.random()
6   if r<1/2:
7     S = ......
8   if r<1/2 and T==0:
9     T=k
10 print("S=",S,"et T=",T)
```

Recopier et compléter la ligne 7 afin que ce programme affiche la bonne valeur de S.

(6) Reconnaître la loi de S. Donner son espérance.

(7) Quelles sont les valeurs possibles pour T ?

(8) Décrire l'évènement $\big((S = 2) \cap (T = 1)\big)$ et montrer que sa probabilité est $\frac{1}{4}$.

(9) Calculer les valeurs des réels **A**, **B**, **C**, **D** et **E** du tableau ci-dessous donnant la loi conjointe du couple (S, T). On ne demande pas de justifier les calculs de cette question.

Tableau des $\mathbf{P}((S = i) \cap (T = j))$

i \ j	0	1	2	3
0	$1/8$	**A**	0	0
1	**B**	$1/8$	$1/8$	**C**
2	0	**D**	$1/8$	0
3	0	$1/8$	0	**E**

(10) Calculer $\mathbf{P}(S = T)$.

(11) Sachant qu'on a obtenu exactement deux fois PILE au cours des trois lancers, quelle est la probabilité que le premier lancer ait donné PILE ?

Troisième partie

On considère la fonction g définie pour tout réel t par

$$\begin{cases} g(t) = 0 & \text{si } t < 0 \\ g(t) = 6t(1-t) & \text{si } 0 \leqslant t < 1 \\ g(t) = 0 & \text{si } t \geqslant 1 \end{cases}$$

(12) Montrer que g est une densité de probabilité.

(13) On suppose que la production de l'atelier de von Neumann se comporte de manière aléatoire : la probabilité d'obtenir PILE pour une pièce prise au hasard est donné par une variable aléatoire Z de densité g.

(a) Calculer la probabilité que la pièce prise au hasard soit équilibrée.

(b) On note F la fonction de répartition de Z.
Montrer que pour tout réel $x \in [0, 1]$, $F(x) = 3x^2 - 2x^3$.

(c) Calculer la probabilité que la pièce prise au hasard ait une probabilité de tomber sur PILE inférieure à $\frac{1}{4}$.

(d) Quelle est l'espérance de Z ?

EXERCICE 3

On note I_3 la matrice identité : $I_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et on considère la matrice $B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

(1) Calculer $B - I_3$ et le produit $B(B - I_3)$.

(2) En déduire un polynôme annulateur de B.

(3) En déduire B^2 puis B^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

(4) Déduire de la question 2) les valeurs propres possibles de B.

(5) Montrer que 0 est une valeur propre de B.

(6) La matrice B est-elle inversible ?

(7) (a) On pose $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Calculer BU.

(b) En déduire que 1 est une valeur propre de B.

(c) Montrer que $V = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ est un vecteur propre de B dont on donnera la valeur propre associée.

On considère la matrice $M = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix}$ et la matrice $A = \frac{1}{4}(M - I_3)$.

(8) Calculer A^2 puis exprimer A^2 en fonction de A.

(9) Vérifier que $M = 4A + I_3$.

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 4 - 3u_n$.

(10) Montrer, en raisonnant par récurrence, que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n A$.

(11) (a) On considère la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie, pour tout $n \in \mathbf{N}$, par $w_n = u_n - 1$.
Montrer que (w_n) est une suite géométrique de raison -3.

(b) Donner une expression de w_n puis une expression de u_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.

(12) Déduire des questions précédentes une expression de M^n en fonction de n, I_3 et A.

(13) Le programme informatique suivant, codé en PYTHON, permet d'obtenir la valeur numérique de u_n pour $n \in \mathbb{N}$.

(a) Expliquer la condition d'arrêt de la boucle `while` à la ligne 9.

(b) Quelle instruction doit-on insérer à la fin de ce programme pour faire afficher u_{2023} ?

```
1 # calcul de f(x)
2 def calcul_f(x):
3   return 4-3*x
4
5 # calcul du terme de rang n
    de la suite
6 def term(n):
7   u=0
8   k=0
9   while k<n:
10    u=calcul_f(u)
11    k=k+1
12  return u
```

(14) Déterminer deux réels α et β tels que $M = \alpha I_3 + \beta B$; où B est la matrice du début de l'exercice.

(15) En déduire, en utilisant la formule du binôme de Newton, une expression de M^n pour $n \in \mathbb{N}^*$, en fonction de I_3 et B. Comparer au résultat de la question (12).

IMPRIMERIE NATIONALE – 23 1106 – D'après documents fournis