

# BSB 2023

## Exercice 1 –

1. Je remplace  $x$  par  $-1$  dans l'expression de  $P(x)$  :

$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$

En effet,  $P$  s'annule bien en  $x = -1$ .

2. D'après la question précédente,  $-1$  est une racine du polynôme  $P$ .

Ainsi  $x - (-1) = x + 1$  est un diviseur de  $P(x)$ , c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré  $3 - 1 = 2$  tel que  $P(x) = (x + 1)(ax^2 + bx + c)$ . Je développe ce produit :

$$(x + 1)(ax^2 + bx + c) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b + a)x^2 + (c + b)x + c.$$

Par identification des coefficients, comme ce produit est égal au polynôme  $P(x)$ , alors

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \\ c = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$

Ainsi une factorisation de  $P(x)$  est donnée par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x + 1)(x^2 - 2x + 1).$$

3. D'après la question 1.,  $-1$  est une racine de  $P(x)$ . Grâce à la question précédente, je cherche les racines de  $x^2 - 2x + 1$ . Je reconnais une identité remarquable :

$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x - 1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$

Finalement  $P(x)$  admet bien deux racines :  $-1$  et  $1$ .

4. Comme  $P(x)$  est un polynôme, il me suffit d'étudier la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} P(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty.$$

5. Pour étudier les variations de  $P$ , j'étudie le signe de sa dérivée. La fonction  $P$  est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$ .

Je calcule le discriminant :  $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$ .

Donc  $P(x)$  a deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-2) + \sqrt{16}}{2 \times 3} = \frac{2 + 4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2 - 4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$

Comme  $a = 3 > 0$ , j'en déduis le tableau de signe de  $P'(x)$  et le tableau de variation de  $P$  :

$x$	$-\infty$	$-\frac{1}{3}$	$1$	$+\infty$	
$P'(x)$	$+$	$0$	$-$	$0$	$+$
$P$	$-\infty$	$\nearrow \frac{32}{27}$	$\searrow 0$	$\nearrow +\infty$	

$$\text{avec } P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1 - 3 + 9 + 27}{27} = \frac{32}{27}.$$

6. Un point d'inflexion représente un changement de convexité de la courbe : la dérivée seconde s'y annule et change de signe.

La fonction  $P'$  est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout  $x \in \mathbb{R}$ ,  $P''(x) = 6x - 2$ . Ainsi

$$P''(x) = 0 \iff 6x - 2 = 0 \iff 6x = 2 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}.$$

Et comme il s'agit d'une fonction affine, le signe change bien au voisinage de  $x = \frac{1}{3}$ . Le point d'abscisse  $x = \frac{1}{3}$  est bien un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction  $P$ .

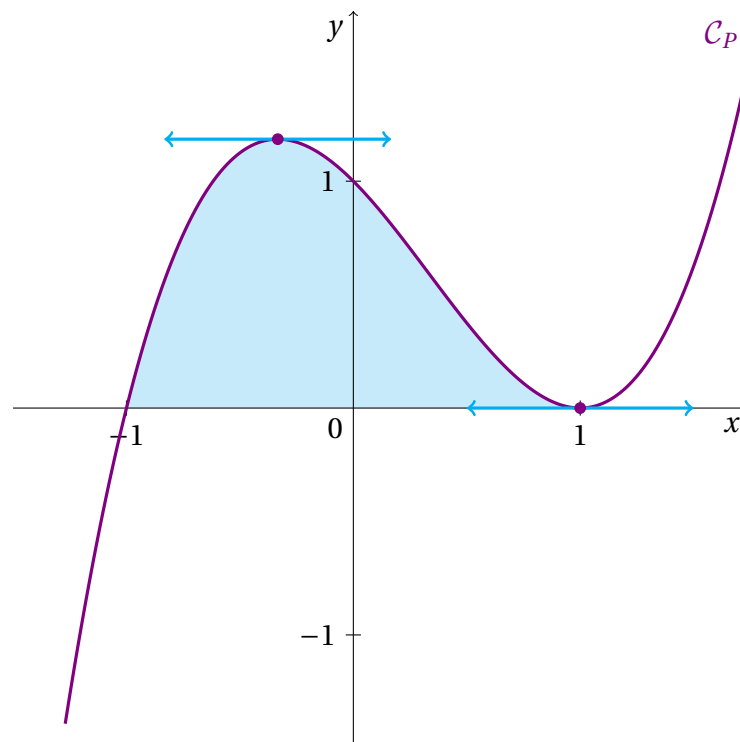
7. Pour calculer l'intégrale  $I$ , il me faut cette fois une primitive de la fonction  $P$ .

Comme il s'agit d'une fonction polynomiale, j'opère directement terme à terme :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^1 P(x) \, dx = \int_{-1}^1 (x^3 - x^2 - x + 1) \, dx = \left[ \frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x \right]_{-1}^1 \\ &= \left( \frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1 \right) - \left( \frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1) \right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. Les tangentes horizontales se situent aux points d'abscisses  $-\frac{1}{3}$  et 1.

Voici le tracé de la courbe de  $P$ , avec en bleu l'aire de l'intégrale  $I$  :



9. Je remplace  $x$  par 0 dans l'expression de  $f(x)$  :

$$f(0) = (0^2 - 2 \times 0 - 1) e^0 = -1 \times 1 = -1.$$

L'image de 0 par  $f$  est  $-1$ .

10. Pour calculer les limites, je décompose le produit en deux facteurs :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 - 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 - 2x - 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0 \end{array} \right\} \text{Par croissances comparées, } \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0.$$

11. La fonction  $f$  est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.

$f$  est de la forme  $u \times v$ , avec  $u(x) = x^2 - 2x - 1$  et  $v(x) = e^x$ .

Comme  $u'(x) = 2x - 2$  et  $v'(x) = e^x$ , alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x - 2) \times e^x + (x^2 - 2x - 1) \times e^x = (x^2 - 3)e^x.$$

Alors comme l'exponentielle est toujours strictement positive,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 &\iff (x^2 - 3)e^x = 0 \iff x^2 - 3 = 0 \iff x^2 = 3 \\ &\iff x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}. \end{aligned}$$

12. Grâce aux informations précédentes, je peux dresser le tableau de signe de  $f'(x)$  et le tableau de variation de  $f$  :

$x$	$-\infty$	$-\sqrt{3}$	$0$	$\sqrt{3}$	$+\infty$	
$f'(x)$		+	0	-	0	+
$f$			$f(-\sqrt{3})$	$-1$	$f(\sqrt{3})$	$+\infty$

$0 \nearrow$  (from  $-\infty$  to  $f(-\sqrt{3})$ )      $\searrow$  (from  $f(-\sqrt{3})$  to  $-1$ )      $\searrow$  (from  $-1$  to  $f(\sqrt{3})$ )      $\nearrow$  (from  $f(\sqrt{3})$  to  $+\infty$ )

13. Grâce au tableau de variation, je sais que la fonction  $f$  est croissante sur  $] -\infty, -\sqrt{3}]$  et que  $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0$ . Alors j'en déduis que  $f(-\sqrt{3})$  est positif.

De même, comme la fonction  $f$  est décroissante sur  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  et que  $f(0) = -1 < 0$ . Alors j'en déduis que  $f(\sqrt{3})$  est négatif.

14. a) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme la fonction  $f$  est continue et strictement décroissante sur l'intervalle  $[-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  et que  $f(-\sqrt{3}) > 0 > f(\sqrt{3})$ , alors  $0$  est une valeur intermédiaire et donc il existe un réel  $\alpha \in [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$  tel que  $f(\alpha) = 0$ . Ce réel est unique par stricte monotonie de la fonction  $f$ .

b) Comme  $f(0) = -1 < 0$ , alors  $f(-\sqrt{3}) > f(\alpha) > f(0)$ , et par décroissance de  $f$ , j'en déduis bien que  $\alpha$  est strictement négatif.

15. L'équation de la tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $-1$  est  $y = f'(-1) \times (x + 1) + f(-1)$ .

Je calcule ces deux valeurs :

$$f(-1) = ((-1)^2 - 2 \times (-1) - 1)e^{-1} = 2e^{-1} = \frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f'(-1) = ((-1)^2 - 3)e^{-1} = -2e^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Finalement l'équation de la tangente devient

$$y = -\frac{2}{e} \times (x + 1) + \frac{2}{e}, \quad \text{i.e.} \quad y = -\frac{2}{e}x.$$

Lorsque  $x$  vaut  $0$ , j'obtiens que  $y$  vaut aussi  $0$ , ce qui confirme bien que cette tangente passe par l'origine du repère.

16. a) L'équation d'une tangente à  $\mathcal{C}_f$  au point d'abscisse  $x_0$  est  $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$ . Cette tangente passe par l'origine si et seulement si cette équation est vérifiée lorsque  $(x, y) = (0, 0)$ , *i.e.*

$$0 = f'(x_0) \times (0 - x_0) + f(x_0) \iff f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

- b) En remplaçant  $f(x_0)$  et  $f'(x_0)$  par leurs expressions dans l'équation précédente, j'obtiens

$$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 \iff (x_0^2 - 2x_0 - 1)e^{x_0} - x_0(x_0^2 - 3)e^{x_0} = 0$$

$$\iff (x_0^2 - 2x_0 - 1 - (x_0^3 - 3x_0))e^{x_0} = 0$$

$$\iff (-x_0^3 + x_0^2 + x_0 - 1)e^{x_0} = 0 \iff -P(x_0)e^{x_0} = 0.$$

Comme une exponentielle n'est jamais nulle, alors on retrouve bien que la tangente passe par l'origine si et seulement si  $P(x_0) = 0$ .

- c) Comme  $P$  n'admet que deux racines distinctes, alors il n'existe que deux abscisses pour lesquelles la tangente en ce point passe par l'origine : en  $-1$  (la tangente déterminée à la question 15.) et en  $1$ .

**Exercice 2 –****Partie 1**

1. a) Il s'agit de  $n = 2$  répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité  $p$ , répétitions identiques et indépendantes. La variable aléatoire  $X$  compte le nombre de succès donc  $X$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 2$  et  $p$ .
- b) Les valeurs prises par  $X$  sont 0, 1 et 2 et pour tout  $k \in \llbracket 0, 2 \rrbracket$ ,

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{2}{k} \times p^k \times (1 - p)^{2-k}.$$

En particulier, pour  $k = 1$ ,  $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{2}{1} \times p^1 \times (1 - p)^1 = 2p(1 - p)$ .

2. Le succès est obtenu lorsque les deux lancers aboutissent à deux résultats différents. Autrement dit, il y a un PILE et un FACE. Ainsi la probabilité du succès est égale à la probabilité de n'obtenir qu'un seul PILE, à savoir  $\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1 - p)$ .
3. a) Dans cette expérience, les cinq premiers lancers aboutissent à deux résultats similaires et il faut attendre le sixième lancer pour obtenir un PILE et un FACE. Ainsi le rang du premier succès est  $N = 6$ .
- b) La variable aléatoire  $N$  est égale au rang du premier succès lors de la répétition de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir deux résultats différents", de probabilité  $2p(1 - p)$ , répétitions identiques et indépendantes.  $N$  suit donc une loi géométrique de paramètre  $q = 2p(1 - p)$ . Le support de  $N$  est donné par  $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$  et pour tout  $k \in \mathbb{N}^*$ ,

$$\mathbf{P}(X = k) = q \times (1 - q)^{k-1} = 2p(1 - p)(p^2 + (1 - p)^2)^{k-1}.$$

En effet si  $q = \mathbf{P}(X = 1) = 2p(1 - p)$ , alors  $1 - q = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 0) = p^2 + (1 - p)^2$ .

- c) Comme  $N$  suit une loi géométrique, alors  $N$  admet une espérance et une variance et

$$E(N) = \frac{1}{q} = \frac{1}{2p(1 - p)} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1 - q}{q^2} = \frac{p^2 + (1 - p)^2}{4p^2(1 - p)^2}.$$

4. a) Alice gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est  $PF$ . Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$\mathbf{P}(PF) = \mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(F) = p(1 - p).$$

- b) Pour qu'Alice gagne à la seconde manche, dès lors que la seconde manche a lieu, la probabilité est la même. Et la probabilité que la seconde manche ait lieu est donnée par  $1 - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - q = p^2 + (1 - p)^2$ . Ainsi la probabilité qu'Alice gagne à la seconde manche est donnée par

$$p(1 - p) \times (p^2 + (1 - p)^2).$$

- c) La probabilité de victoire de Bob est égale à celle de Alice, puisque seul l'ordre d'apparition des résultats change : Bob gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est  $FP$ . Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$\mathbf{P}(FP) = \mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(P) = (1 - p) \times p = p(1 - p).$$

Comme il y a un PILE et un FACE des deux côtés, les probabilités sont égales, à la première comme à la seconde manche. Donc le jeu est équitable.

**Partie 2**

5. Voici la fonction Python complétée :

```

1. import numpy.random as rd
2. S=0
3. T=0
4. for k in range(1,4):
5.     r=rd.random()
6.     if r<1/2:
7.         S=S+1
8.     if r<1/2 and T==0:
9.         T=k
10. print("S=",S,"et T=",T)

```

6. La variable aléatoire  $S$  compte le nombre de succès lors de  $n = 3$  répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité  $p = \frac{1}{2}$ , répétitions identiques et indépendantes. Donc  $S$  suit une loi binomiale de paramètres  $n = 3$  et  $p = \frac{1}{2}$ .

Son espérance est donnée par  $E(S) = n \times p = 3 \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ .

7. Le support de  $T$  est donné par  $T(\Omega) = \{0, 1, 2, 3\}$ , selon qu'aucun PILE soit obtenu ou que le premier PILE arrive au lancer 1, 2 ou 3.

8. L'événement  $[S = 2] \cap [T = 1]$  correspond à ce que les trois lancers apportent deux PILE et que le premier soit obtenu au premier tirage. Il y a donc deux issues possibles :

$$[S = 2] \cap [T = 1] = \{(PPF), (PF P)\}.$$

Comme la pièce est équilibrée et que les tirages sont indépendants, les  $2^3 = 8$  issues possibles ont la même probabilité d'arriver. Ainsi, comme deux issues sont favorables à cet événement, sa probabilité est donnée par  $\frac{2}{8} = \frac{1}{4}$ .

9. Voici les probabilités manquantes dans le tableau de la loi conjointe :

$$A = \mathbf{P}([S = 0] \cap [T = 1]) = 0, \quad B = \mathbf{P}([S = 1] \cap [T = 0]) = 0, \quad C = \mathbf{P}([S = 1] \cap [T = 3]) = \frac{1}{8}$$

$$D = \mathbf{P}([S = 2] \cap [T = 1]) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad E = \mathbf{P}([S = 3] \cap [T = 3]) = 0.$$

10. En décomposant selon les valeurs possibles et grâce à la loi conjointe,

$$\mathbf{P}(S = T) = \sum_{k=0}^3 \mathbf{P}([S = k] \cap [T = k]) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + 0 = \frac{3}{8}.$$

11. Je cherche ici  $\mathbf{P}_{[S=2]}(T = 1)$ . D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[S=2]}(T = 1) = \frac{\mathbf{P}([S = 2] \cap [T = 1])}{\mathbf{P}(S = 2)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8} + \frac{1}{8}} = \frac{2}{3}.$$

## Partie 3

12. Je montre que la fonction  $g$  vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :

- Pour  $t \notin [0, 1[$ ,  $g(t) = 0 \geq 0$  et pour  $t \in [0, 1[$ ,  $g(t) = 6t(1-t) \geq 0$  car  $t \geq 0$  et  $t \leq 1$ .  
Donc  $\forall t \in \mathbb{R}$ ,  $g(t) \geq 0$ .
- La fonction  $g$  est continue sur  $] -\infty, 0[$  car constante, elle est continue sur  $[0, 1[$  car polynomiale et elle est continue sur  $[1, +\infty[$  car constante.  
Donc  $g$  admet au plus deux points de discontinuité en 0 et en 1.
- Il reste à montrer que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$  converge et vaut 1.

Étant donnée l'expression de  $g$ , j'étudie séparément les intégrales suivantes :

$$\triangleright \text{Déjà, } \int_{-\infty}^0 g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt \text{ et } \int_1^{+\infty} g(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt \text{ convergent et valent } 0.$$

$\triangleright$  Puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 g(t) dt &= \int_0^1 6t(1-t) dt = 6 \times \int_0^1 (t-t^2) dt = 6 \times \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^1 \\ &= 6 \times \left( \frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3} \right) = 6 \times \frac{3-2}{6} = 6 \times \frac{1}{6} = 1. \end{aligned}$$

Grâce à la relation de Chasles, j'en déduis que l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt$  converge et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt = \int_{-\infty}^0 g(t) dt + \int_0^1 g(t) dt + \int_1^{+\infty} g(t) dt = 0 + 1 + 0 = 1.$$

La fonction  $g$  vérifie les trois conditions donc  $g$  est bien une densité de probabilité.

13. a) Je cherche  $P\left(Z = \frac{1}{2}\right)$ . Or  $Z$  est une variable aléatoire à densité, donc  $P\left(Z = \frac{1}{2}\right) = 0$ .

b) Si  $x \in [0, 1]$ , alors  $g$  est nulle sur  $] -\infty, 0[$  et  $g(t) = 6t(1-t)$  pour  $t \in [0, x]$ . Alors

$$\begin{aligned} F(x) &= \int_{-\infty}^x g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt + \int_0^x 6t(1-t) dt = 0 + 6 \times \left[ \frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3} \right]_0^x \\ &= 6 \times \left( \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3} \right) = 3x^2 - 2x^3. \end{aligned}$$

c) Je cherche  $P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right)$ . Grâce à la fonction de répartition, comme  $\frac{1}{4} \in [0, 1]$ , alors

$$P\left(Z \leq \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{32} = \frac{6-1}{32} = \frac{5}{32}.$$

d)  $Z$  admet une espérance si et seulement si l'intégrale  $\int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt$  converge.

- Déjà,  $\int_{-\infty}^0 t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 0 dt$  et  $\int_1^{+\infty} t g(t) dt = \int_1^{+\infty} 0 dt$  convergent et valent 0.
- Puis

$$\begin{aligned} \int_0^1 t g(t) dt &= \int_0^1 t \times 6t(1-t) dt = 6 \times \int_0^1 (t^2 - t^3) dt = 6 \times \left[ \frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4} \right]_0^1 \\ &= 6 \times \left( \frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{0}{3} + \frac{0}{4} \right) = 6 \times \frac{4-3}{12} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Alors la variable aléatoire  $Z$  admet une espérance et

$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} t g(t) dt = \int_{-\infty}^0 t g(t) dt + \int_0^1 t g(t) dt + \int_1^{+\infty} t g(t) dt = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

**Exercice 3 –**

1. Je calcule la différence coefficient par coefficient puis le produit matriciel :

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B \times (B - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 2-2 \\ -2+1+1 & 0 & -2+1+1 \\ -2+2 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. Comme  $B \times (B - I_3) = 0_3$ , j'en déduis que le polynôme  $x(x - 1)$  est un polynôme annulateur de la matrice  $B$ .
3. Comme  $B \times (B - I_3) = 0_3$ , en développant le produit j'obtiens que  $B^2 - B = 0_3$ , *i.e.*  $B^2 = B$ .  
À partir de là, pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $B^n = B$ .
4. Les valeurs propres possibles pour une matrice sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Or

$$x(x - 1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour  $B$  sont 0 et 1.

5. 0 est une valeur propre de  $B$  s'il existe une solution non nulle  $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$  de l'équation  $BX = 0X$ . Je résous alors cette équation :

$$BX = 0X \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{cases} -x & - & 2z = 0 \\ x & + & y & + & z = 0 \\ x & & & + & 2z = 0 \end{cases}$$

Je remarque que la troisième ligne est l'opposée de la première : elles sont donc équivalentes. Puis en additionnant la première à la deuxième, j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\begin{cases} x & + & 2z = 0 \\ & y & - & z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -2z \\ y = z \end{cases}$$

Alors en fixant  $z = 1$ , j'obtiens une solution non nulle de l'équation matricielle  $BX = 0X$  :

$$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad \text{Donc 0 est bien une valeur propre de la matrice } B.$$

6. Si la matrice  $B$  était inversible, alors en notant  $B^{-1}$  son inverse et en multipliant l'équation précédemment obtenue par  $B^{-1}$  à gauche, j'obtiendrais

$$B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff B^{-1} \times B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est évidemment une contradiction. Donc la matrice  $B$  n'est pas inversible.

7. a) Je calcule le produit matriciel :

$$BU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U.$$



- b) La matrice colonne  $U$  est non nulle et satisfait l'équation matricielle  $B U = 1 U$ .  
Alors 1 est une valeur propre de la matrice  $B$  et  $U$  en est un vecteur propre associé.
- c) Je calcule encore le produit matriciel :

$$B V = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

La matrice colonne  $V$  est non nulle et satisfait l'équation matricielle  $B V = 1 V$ .  
Alors  $V$  est un vecteur propre de la matrice  $B$  associé à la valeur propre 1.

8. Je commence par calculer la matrice  $A$  :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc } A = \frac{1}{4}(M - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B - I_3.$$

Puis je calcule le produit matriciel  $A^2 = A \times A$  :

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-2 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

9. Par définition de  $M$  :

$$A = \frac{1}{4}(M - I_3) \iff 4A = M - I_3 \iff 4A + I_3 = M.$$

10. Je raisonne par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ .

**Énoncé :** Je note  $\mathcal{P}_n$  la propriété :  $M^n = I_3 + u_n A$ .

**Initialisation :** Pour  $n = 0$ ,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad I_3 + u_0 A = I_3 + 0 \times A = I_3.$$

Ainsi  $\mathcal{P}_0$  est vraie.

**Hérédité :** Soit  $n \geq 0$ . Je suppose que  $\mathcal{P}_n$  est vraie et je montre que  $\mathcal{P}_{n+1}$  l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,  $M^n = I_3 + u_n A$ . Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = (I_3 + u_n A) \times (I_3 + 4A) = I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2 = I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A \\ &= I_3 + (4 + u_n - 4u_n) \times A = I_3 + (4 - 3u_n) \times A = I_3 + u_{n+1} A. \end{aligned}$$

Finalement  $\mathcal{P}_{n+1}$  est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour  $n = 0$  et est héréditaire, alors par principe de récurrence,  $\mathcal{P}_n$  est vraie pour tout  $n \geq 0$ , *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + u_n A.$$

11. a) Pour montrer que la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, j'exprime  $w_{n+1}$  en fonction de  $w_n$  pour un entier  $n \in \mathbb{N}$  quelconque :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 4 - 3u_n - 1 = 4 - 3(w_n + 1) - 1 = 4 - 3w_n - 3 - 1 = -3w_n.$$

Ainsi la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est bien géométrique, de raison  $q = -3$ .

- b) Comme la suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est géométrique, de raison  $q = -3$  et de premier terme  $w_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$ , alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n = -(-3)^n.$$

Puis comme pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $u_n = w_n + 1$ , alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + 1 = 1 - (-3)^n.$$

12. En combinant que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $M^n = I_3 + u_n A$  et  $u_n = 1 - (-3)^n$ , alors j'obtiens que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + (1 - (-3)^n)A.$$

13. a) À chaque itération de la boucle `while`, la variable `u` est actualisée de  $u_k$  à  $u_{k+1}$  puis `k` augmente de 1. Alors lorsque `k` vaut `n`, la variable `u` contient déjà la valeur de  $u_n$ . Il est donc temps de sortir de la boucle.
- b) Pour afficher  $u_{2023}$ , il suffira de faire appel à cette fonction et d'afficher le résultat à l'aide de l'instruction :

```
print(term(2023))
```

14. J'ai déjà remarqué à la question 8. que  $A = B - I_3$ . Alors en combinant cela avec  $M = 4A + I_3$ , j'obtiens que

$$M = 4A + I_3 = 4(B - I_3) + I_3 = 4B - 4I_3 + I_3 = 4B - 3I_3.$$

Ainsi choisir  $\alpha = -3$  et  $\beta = 4$  convient.

15. D'après la formule du binôme de Newton, comme les matrices  $I_3$  et  $B$  commutent, et comme pour tout  $k \geq 1$ ,  $B^k = B$ , alors pour tout entier  $n \in \mathbb{N}^*$ ,

$$M^n = (4B - 3I_3)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times (4B)^k \times (-3I_3)^{n-k} = (-3)^n I_3 + \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k} \right) \times B.$$

Puis je cherche à simplifier le coefficient devant la matrice  $B$  :

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k} &= (-3)^n \times \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times \left(\frac{4}{3}\right)^k = (-3)^n \times \left( \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k} \right) \\ &= (-3)^n \times \left( \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k} - 1 \right) = (-3)^n \times \left( \left(1 - \frac{4}{3}\right)^n - 1 \right) \\ &= (-3)^n \times \left( \left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1 \right) = 1 - (-3)^n. \end{aligned}$$

Finalement j'obtiens que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M^n = (-3)^n I_3 + (1 - (-3)^n) B.$$

Et en injectant que  $A = B - I_3$  dans l'expression obtenue à la question 12., je retrouve bien cette expression : pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$M^n = I_3 + (1 - (-3)^n) \times (B - I_3) = I_3 + (1 - (-3)^n)B - I_3 + (-3)^n I_3 = (1 - (-3)^n)B + (-3)^n I_3.$$