ECRICOME 2022

Exercice 1 –

Partie A – Calcul matriciel et suites

1. a) Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\\ 1 & 0 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 2 & -1 & -1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+2 & 1-1 & 1-1\\ 1-2+1 & 1+1+1 & 1+1-2\\ 1-1 & 1-1 & 1+2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3 & 0 & 0\\ 0 & 3 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix} = 3I.$$

b) Comme $P \times Q = 3I$, alors en particulier $P \times \left(\dfrac{1}{3}Q\right) = I$.

Donc la matrice P est inversible et son inverse est donnée par $P^{-1} = \dfrac{1}{3}Q$.

2. a) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit MX_n :

$$MX_n = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2 & 1 & 1\\ 1 & 2 & 1\\ 1 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a_n\\ b_n\\ c_n\end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix}2a_n + b_n + c_n\\ a_n + 2b_n + c_n\\ a_n + b_n + 2c_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\dfrac{a_n}{2} + \dfrac{b_n}{4} + \dfrac{c_n}{4}\\ \dfrac{a_n}{4} + \dfrac{b_n}{2} + \dfrac{c_n}{4}\\ \dfrac{a_n}{4} + \dfrac{b_n}{4} + \dfrac{c_n}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a_{n+1}\\ b_{n+1}\\ c_{n+1}\end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

Grâce aux formules de récurrence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$,
je retrouve bien que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = MX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = M^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 X_0 = I \times X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors d'après la question précédente,

$$X_{n+1} = MX_n = M \times M^n X_0 = M^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = M^n X_0.$$

3. a) Je calcule chaque matrice puis le produit :

$$4M - I = \begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad 4M - 4I = \begin{pmatrix}-2 & 1 & 1\\ 1 & -2 & 1\\ 1 & 1 & -2\end{pmatrix}$$

donc

$$\big(4M - I\big)\big(4M - 4I\big) = \begin{pmatrix}-2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2\\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2\\ -2+1+1 & 1-2+1 & 1+1-2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que la matrice $\big(4M - I\big)\big(4M - 4I\big)$ est la matrice nulle.

b) Comme $(4M-I)(4M-4I)$ est la matrice nulle, alors $(4X-1)(4X-4)$ est un polynôme annulateur de la matrice M. Ainsi les valeurs propres possibles pour M sont parmi les racines de ce polynôme. Je cherche donc les racines :

$$(4X-1)(4X-4)=0 \iff 4X-1=0 \text{ ou } 4X-4=0 \iff 4X=1 \text{ ou } 4X=4$$
$$\iff X=\frac{1}{4} \text{ ou } X=\frac{4}{4}=1.$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour la matrice M sont $\frac{1}{4}$ et 1.

4. a) Je cherche la matrice D telle que $M=PDP^{-1}$. Comme P est inversible, en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, j'obtiens que

$$P^{-1}\times M\times P=P^{-1}\times PDP^{-1}\times P=I\times D\times I=D, \qquad \textit{i.e.} \quad D=P^{-1}MP.$$

Ainsi je calcule les produits :

$$MP=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}2+1+1&2-1&1-1\\1+2+1&1-2&2-1\\1+1+2&1-1&1-2\end{pmatrix}=\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&1&0\\4&-1&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}\times MP=\frac{1}{3}Q\times MP=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1&1&1\\2&-1&-1\\1&1&-2\end{pmatrix}\times\frac{1}{4}\begin{pmatrix}4&1&0\\4&-1&1\\4&0&-1\end{pmatrix}$$
$$=\frac{1}{12}\begin{pmatrix}4+4+4&1-1&1-1\\8-4-4&2+1&-1+1\\4+4-8&1-1&1+2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}.$$

Alors la matrice D est bien diagonale et $D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\frac{1}{4}&0\\0&0&\frac{1}{4}\end{pmatrix}$.

b) Puisque $M=PDP^{-1}$, alors par récurrence, j'obtiens que $M^n=PD^nP^{-1}$.

c) Comme la matrice D est diagonale, alors pour tout entier $n\in\mathbb{N}$,

$$D^n=\begin{pmatrix}1^n&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}.$$

Puis je calcule les produits :

$$PD^n=\begin{pmatrix}1&1&0\\1&-1&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\0&0&\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&\left(\frac{1}{4}\right)^n&0\\1&-\left(\frac{1}{4}\right)^n&\left(\frac{1}{4}\right)^n\\1&0&-\left(\frac{1}{4}\right)^n\end{pmatrix}$$

et

$$PD^n \times P^{-1} = PD^n \times \frac{1}{3}Q = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & \left(\frac{1}{4}\right)^n & 0 \\ 1 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n & \left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1 & 0 & -\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n+\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+\left(\frac{1}{4}\right)^n-2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré que la matrice M^n est donnée par

$$M^n = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n \\ 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1-\left(\frac{1}{4}\right)^n & 1+2\times\left(\frac{1}{4}\right)^n \end{pmatrix}.$$

d) D'après la question **2.b)**, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix} = X_n = M^n X_0 = M^n \times \begin{pmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{pmatrix} = M^n \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$a_n = \frac{1}{3}\times\left(1+2\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1+2\times\frac{1}{4^n}\right) = \frac{1}{3}\times\left(1+\frac{2}{4^n}\right),$$

$$b_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{3}\times\left(1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right) = \frac{1}{3}\times\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

e) Comme $4 > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} 4^n = +\infty$ et par quotient, $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{4^n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2}{4^n} = 0$. Donc

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{3}(1+0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} b_n = \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{3}(1-0) = \frac{1}{3}.$$

5. Voici le script complété.

```
n=0
a=1; b=0
while a>0.0334 and b<0.333
    n=n+1
    a=1/3*(1+(2/4∧n))
    b=1/3*(1-(1/4∧n))
end
disp(n)
```

Partie B – Application à un jeu de hasard

6. Selon l'énoncé, au début du jeu, le pion est sur la case 0. Donc directement

$$P(A_0) = 1, \qquad P(B_0) = 0 \quad \text{et} \quad P(C_0) = 0,$$

ce qui corrobore bien le fait que A_0 est l'événement certain et que B_0 et C_0 sont des événements impossibles, comme annoncé en fin d'énoncé.
Puis le joueur avance son pion de 0, 1, 2 ou 3 cases en fonction du chiffre tiré de manière équiprobable. Je remarque que s'il tire 0 ou 3, le pion ne bouge pas ou avance de trois cases, ce qui le ramène à la même case.
Donc à l'issue du premier coup, le joueur sera encore sur la case 0 avec probabilité $\frac{2}{4}$, sur la case 1 avec probabilité $\frac{1}{4}$ et sur la case 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$. Ainsi j'ai montré que

$$P(A_1) = P\big(\{0,3\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \qquad P(B_1) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{4} \quad \text{et} \quad P(C_1) = P\big(\{2\}\big) = \frac{1}{4}.$$

7. a) Pour les mêmes raisons qu'au premier coup, si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 0, alors il y sera encore à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 0 (ne bouge pas) ou 3 (fait un tour complet). Il s'agit de deux possibilités sur quatre dans une situation d'équiprobabilité, donc

$$P_{A_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{0,3\}\big) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 1, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 2. Donc

$$P_{B_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{2\}\big) = \frac{1}{4}.$$

Et si à l'issue du n-ième coup, le pion est sur la case 2, alors il sera sur la case 0 à l'issue du coup suivant si le joueur a tiré 1. Donc

$$P_{C_n}\big(A_{n+1}\big) = P\big(\{1\}\big) = \frac{1}{4}.$$

b) D'après la formule des probabilités totales, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\big\{A_n, B_n, C_n\big\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P\big(A_{n+1}\big) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(B_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(C_n \cap A_{n+1}\big) \\ &= P(A_n) \times P_{A_n}\big(A_{n+1}\big) + P(B_n) \times P_{B_n}\big(A_{n+1}\big) + P(C_n) \times P_{C_n}\big(A_{n+1}\big) \\ &= P(A_n) \times \frac{1}{2} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{4} \end{aligned}$$

Je peux montrer exactement de la même façon que

$$P\big(B_{n+1}\big) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{2} + P(C_n) \times \frac{1}{4}$$

et

$$P\big(C_{n+1}\big) = P(A_n) \times \frac{1}{4} + P(B_n) \times \frac{1}{4} + P(C_n) \times \frac{1}{2}.$$

c) Les formules de récurrence des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont les mêmes que celles vérifiées par les suites $\big(P(A_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$, $\big(P(B_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$ et $\big(P(C_n)\big)_{n\in\mathbb{N}}$. Aussi, les termes initiaux a_0, b_0 et c_0 correspondent aux probabilités initiales $P(A_0)$, $P(B_0)$ et $P(C_0)$.

Donc ces suites possèdent la même définition, *i.e.* pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P(A_n) = a_n = \frac{1}{3}\left(1+\frac{2}{4^n}\right), \qquad P(B_n) = b_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right) \quad \text{et} \quad P(C_n) = c_n = \frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{4^n}\right).$$

8. J'ai montré à la question **4.e)** que la limite de chacune des trois suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vaut $\frac{1}{3}$. En terme de probabilités, cela signifie qu'après un grand nombre de coups, la probabilité d'être sur n'importe quelle case du plateau est proche de $\frac{1}{3}$.
La situation tend à se rapprocher d'une situation d'équiprobabilité.

Exercice 2 –

1. a) Je raisonne par composition puis par produit :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1} 1+x = \ \ 0\\ \lim\limits_{X\to 0} \ln(X) = -\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition,}\quad \lim_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-1} x = \ -1\\ \lim\limits_{x\to-1} \ln(1+x) = -\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit,}\quad \lim_{x\to-1} x\ln(1+x) = +\infty.$$

Graphiquement, je peux en déduire que la courbe $\mathcal{C}_f$ admet une asymptote verticale d'équation $x=-1$.

b) De même, par composition puis par produit :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1+x = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} \ln(X) = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par composition,}\quad \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty.$$

Puis

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty\end{array}\right\}\text{ Par produit,}\quad \lim_{x\to+\infty} x\ln(1+x) = +\infty.$$

c) Pour étudier une éventuelle branche parabolique, il me faut étudier la limite de $\dfrac{f(x)}{x}$.
Or $\dfrac{f(x)}{x} = \ln(1+x)$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty$. Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien une branche parabolique au voisinage de $+\infty$, de direction (Oy).

2. a) La fonction f est dérivable sur $]-1,+\infty[$. f est de la forme $f = u\times v$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = \ln(1+x)$. Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = \dfrac{w'(x)}{w(x)}$, avec $w(x) = 1+x$.
Comme $w'(x) = 1$, alors $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$ et donc pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$,

$$f'(x) = 1\times\ln(1+x) + x\times\frac{1}{1+x} = \ln(1+x) + \frac{x}{1+x}.$$

b) Je dérive de nouveau f' pour trouver f''. La fonction f' est dérivable sur $]-1,+\infty[$.
f' est une somme donc je dérive terme à terme :

- Je connais déjà la dérivée de $v(x) = \ln(1+x)$, qui est $v'(x) = \dfrac{1}{x+1}$.
- La dérivée de $u(x) = \dfrac{x}{1+x}$ est donnée par $u'(x) = \dfrac{1\times(1+x) - x\times 1}{(1+x)^2} = \dfrac{1}{(1+x)^2}$.

Alors pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, j'ai bien montré que

$$f''(x) = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{(1+x)+1}{(1+x)^2} = \frac{x+2}{(1+x)^2}.$$

c) Pour étudier les variations de f', il me faut étudier le signe de la dérivée f''.
Or pour $x\in\,]-1,+\infty[$, $x\geqslant -1 \iff x+2\geqslant 1>0$. Et comme le dénominateur est un carré, il est positif. Ainsi pour tout $x\in\,]-1,+\infty[$, $f''(x)\geqslant 0$ donc la fonction f' est croissante sur l'intervalle $]-1,+\infty[$.

3. a) Je calcule $f'(0)$ en remplaçant x par 0 dans la formule obtenue en question **2.a)** :

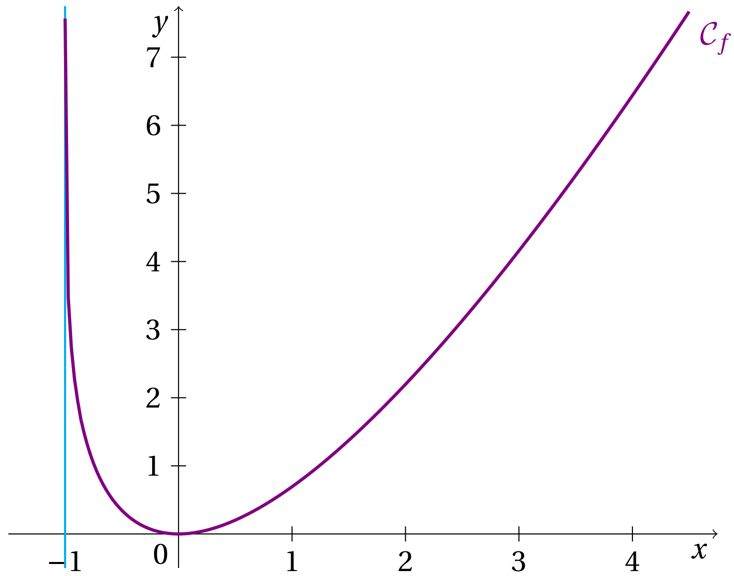
$$f'(0) = \ln(1+0) + \frac{0}{1+0} = \ln(1) + 0 = 0.$$

Comme f' est croissante et que $f'(0) = 0$, alors je peux en déduire que $f'(x)$ est négatif pour $x \leqslant 0$ et positif pour $x \geqslant 0$.

b) D'après la question précédente, je connais le signe de la dérivée f'.
Je peux donc déduire les variations de la fonction f. Voici le tableau de variation de f, complété avec les limites trouvées en question **1.** et $f(0) = 0 \times \ln(1+0) = 0$.

x	-1		0		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f	$+\infty$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

4. Grâce au tableau de variation et à l'asymptote $x = -1$, je peux tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$. Je note qu'en 0, la courbe passe par l'axe des abscisses et la tangente est horizontale.



5. a) Je cherche à calculer $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\ln(1+x)\,\mathrm{d}x$. Je pose

$$u'(x) = x \qquad u(x) = \frac{x^2}{2}$$

$$v(x) = \ln(1+x) \qquad v'(x) = \frac{1}{1+x}$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_0^1 x\ln(x)\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^2}{2}\ln(1+x)\right]_0^1 - \int_0^1 \frac{x^2}{2} \times \frac{1}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

$$= \frac{1^2}{2}\ln(1+1) - \frac{0^2}{2}\ln(1+0) - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x$$

J'ai bien montré que $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = \frac{\ln(2)}{2} - \frac{1}{2}\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x.$

b) Pour vérifier cette égalité, il me suffit de partir du terme de droite puis de tout mettre au même dénominateur :

$$x-1+\frac{1}{x+1}=\frac{(x-1)(x+1)}{x+1}+\frac{1}{x+1}=\frac{x^2-1+1}{x+1}=\frac{x^2}{x+1}.$$

c) En réécrivant l'intégrande selon l'expression trouvée précédemment puis en primitivant terme à terme, j'obtiens que

$$\int_0^1 \frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\int_0^1\left(x-1+\frac{1}{x+1}\right)\mathrm{d}x=\left[\frac{x^2}{2}-x+\ln(1+x)\right]_0^1$$
$$=\left(\frac{1^2}{2}-1+\ln(1+1)\right)-\left(\frac{0^2}{2}-0+\ln(1+0)\right)=\frac{1}{2}-1+\ln(2)-0=\ln(2)-\frac{1}{2}.$$

d) Finalement, en combinant les résultats des questions précédentes, j'obtiens que

$$I=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\int_0^1\frac{x^2}{1+x}\,\mathrm{d}x=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{1}{2}\times\left(\ln(2)-\frac{1}{2}\right)=\frac{\ln(2)}{2}-\frac{\ln(2)}{2}+\frac{1}{4}=\frac{1}{4}.$$

6. Voici le script complété.

```
function y=f(x)
    y=x∧n*log(1+x)
endfunction
for n=1:50
    x=linspace(0,1,100)
    fplot2d(x,f)
end
```

7. a) Graphiquement, l'intégrale I_n représente l'aire sous la courbe de la fonction f_n, au-dessus de l'axe des abscisses, entre les droites verticales d'équations $x=0$ et $x=1$.

b) À l'aide du graphique proposé, je conjecture que la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est nulle. En effet, l'aire sous la courbe semble se réduire indéfiniment.

8. a) Soit un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et un réel $x\in[0,1]$. Alors par croissance de la fonction logarithme,

$$0\leqslant x\leqslant 1 \iff 1\leqslant 1+x\leqslant 2 \iff 0=\ln(1)\leqslant\ln(1+x)\leqslant\ln(2).$$

Puis comme $x\geqslant 0$, alors $x^n\geqslant 0$ et en multipliant dans l'inégalité précédente,

$$0\leqslant x^n\ln(1+x)\leqslant x^n\ln(2).$$

b) Grâce à la question précédente et par linéarité de l'intégrale, pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$,

$$\int_0^1 0\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_0^1 x^n\ln(2)\,\mathrm{d}x.$$

Puis $\displaystyle\int_0^1 0\,\mathrm{d}x=0$ et

$$\int_0^1 x^n\ln(2)\,\mathrm{d}x=\ln(2)\times\int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x=\ln(2)\times\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^1=\ln(2)\times\left(\frac{1^{n+1}}{n+1}-\frac{0^{n+1}}{n+1}\right)=\frac{\ln(2)}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n\in\mathbb{N}^*$, $\displaystyle 0\leqslant I_n\leqslant\frac{\ln(2)}{n+1}$.

c) D'après la question précédente, je connais un encadrement de I_n : $\displaystyle 0\leqslant I_n\leqslant\frac{\ln(2)}{n+1}$.

Puis $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}0=0$ et comme $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n}=0$, alors $\displaystyle\lim_{n\to+\infty}\frac{\ln(2)}{n+1}=0$.
Je conclus grâce au théorème des gendarmes :

$$\lim_{n\to+\infty}I_n=0.$$

Exercice 3 –

1. J'étudie la continuité de la fonction f en $x=0$.
   Pour cela, je compare les limites à gauche et à droite de 0 :
   $$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{2a^2} = \frac{0}{2a^2} = 0.$$
   Comme la limite à gauche de f en 0 est égale à la limite à droite de f en 0,
   alors j'en déduis que la fonction f est bien continue en 0.
   De la même manière, en $x=2a$:
   $$\lim_{x\to 2a^+} f(x) = \lim_{x\to 2a^+} 0 = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{x\to 2a^-} f(x) = \lim_{x\to 2a^-} \frac{x}{2a^2} = \frac{2a}{2a^2} = \frac{1}{a}.$$
   Comme la limite à gauche de f en $2a$ n'est pas égale à la limite à droite de f en $2a$,
   alors j'en déduis que la fonction f n'est pas continue en $2a$.
2. La fonction f est définie en trois morceaux :
   - Pour $x \notin [0,2a]$, $f(x)=0 \geqslant 0$ et pour $x\in[0,2a]$, $f(x)=\dfrac{x}{2a^2} \geqslant 0$
     car $x \geqslant 0$ et qu'un carré est toujours positif. Donc la fonction f est positive sur $\mathbb{R}$.
   - Sur $]-\infty,0[$, $f(x)=0$ est continue car constante, sur $[0,2a]$, $f(x)=\dfrac{x}{2a^2}$ est continue car polynomiale et sur $]2a,+\infty[$, $f(x)=0$ est continue car constante.
     Grâce à la question précédente, je sais que f est aussi continue en 0, mais pas en $2a$: elle admet donc un unique point de discontinuité sur $\mathbb{R}$.
   - Il me reste à montrer que l'intégrale converge et vaut 1. Par la relation de Chasles, sous réserve de convergence,
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt + \int_{2a}^{+\infty} 0\,dt.$$
     Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt$ converge et vaut 0, puisque la fonction sous l'intégrale est nulle.
     De même $\displaystyle\int_{2a}^{+\infty} 0\,dt$ converge et vaut 0. Ainsi l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ converge et vaut
     $$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt = \left[\frac{1}{2a^2}\times\frac{t^2}{2}\right]_0^{2a} = \frac{1}{2a^2}\times\left(\frac{(2a)^2}{2}-\frac{0^2}{2}\right) = \frac{1}{2a^2}\times\frac{4a^2}{2} = 1.$$
     Ainsi j'ai bien montré que l'intégrale converge et vaut 1.

   Grâce aux trois points précédents, je conclus que f décrit bien une densité de probabilité.
3. a) La fonction de répartition F de X est donnée par $F(x) = P(X \leqslant x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$.
   Je raisonne ensuite par disjonction de cas :
   - si $x<0$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{x} 0\,dt = 0$,
   - si $0 \leqslant x \leqslant 2a$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^x \frac{t}{2a^2}\,dt = 0 + \left[\frac{t^2}{4a^2}\right]_0^x = \frac{x^2}{4a^2} - \frac{0^2}{4a^2} = \frac{x^2}{4a^2}$,
   - si $x>2a$, alors $F(x) = \displaystyle\int_{-\infty}^{0} 0\,dt + \int_0^{2a} \frac{t}{2a^2}\,dt + \int_{2a}^{x} 0\,dt = 0+1+0 = 1$.

   Ainsi j'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x<0, \\ \dfrac{x^2}{4a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 2a, \\ 0 & \text{si } x > 2a. \end{cases}$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leqslant a) = \frac{P\left([X > \frac{a}{2}] \cap [X \leqslant a]\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)} = \frac{P\left(\frac{a}{2} < X \leqslant a\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)}.$$

Puis en utilisant la fonction de répartition,

$$P\left(X > \frac{a}{2}\right) = 1 - P\left(X \leqslant \frac{a}{2}\right) = 1 - F\left(\frac{a}{2}\right) = 1 - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2} = 1 - \frac{a^2}{4} \times \frac{1}{4a^2} = 1 - \frac{1}{16} = \frac{15}{16}$$

et

$$P\left(\frac{a}{2} < X \leqslant a\right) = F(a) - F\left(\frac{a}{2}\right) = \frac{a^2}{4a^2} - \frac{\left(\frac{a}{2}\right)^2}{4a^2} = \frac{1}{4} - \frac{1}{16} = \frac{3}{16}.$$

Finalement

$$P_{[X>\frac{a}{2}]}(X \leqslant a) = \frac{P\left(\frac{a}{2} < X \leqslant a\right)}{P\left(X > \frac{a}{2}\right)} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{15}{16}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

4. La variable aléatoire X admet une espérance si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or sous réserve de convergence,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} t \times 0\,\mathrm{d}t + \int_{0}^{2a} t \times \frac{t}{2a^2}\,\mathrm{d}t + \int_{2a}^{+\infty} t \times 0\,\mathrm{d}t.$$

Pour les mêmes raisons que précédemment, l'intégrale converge,
i.e. X admet une espérance et

$$E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2a} \frac{t^2}{2a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^3}{6a^2}\right]_0^{2a} = \frac{(2a)^3}{6a^2} - \frac{0^3}{6a^2} = \frac{8a^3}{6a^2} = \frac{4a}{3}.$$

5. La variable aléatoire X admet une variance si et seulement si la variable aléatoire X^2 admet une espérance, *i.e.* si et seulement si l'intégrale généralisée $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
De la même manière que dans la question précédente, l'intégrale généralisée converge et

$$E\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 f(t)\,\mathrm{d}t = \int_{0}^{2a} \frac{t^3}{2a^2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t^4}{8a^2}\right]_0^{2a} = \frac{(2a)^4}{8a^2} - \frac{0^4}{8a^2} = \frac{16a^4}{8a^2} = 2a^2.$$

Donc X admet une variance et selon la formule de König-Huygens,

$$V(X) = E\left(X^2\right) - E(X)^2 = 2a^2 - \left(\frac{4a}{3}\right)^2 = 2a^2 - \frac{16a^2}{9} = \frac{18a^2}{9} - \frac{16a^2}{9} = \frac{2a^2}{9}.$$

6. a) Par définition de la fonction de répartition, pour $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(X^2 \leqslant x\right)$ et pour $x \geqslant 0$, comme X ne prend que des valeurs positives,

$$G(x) = P(Y \leqslant x) = P\left(X^2 \leqslant x\right) = P\left(X \leqslant \sqrt{x}\right) = F\left(\sqrt{x}\right).$$

Ainsi en reprenant ma disjonction de cas :

- si $x < 0$, alors $G(x) = P\left(X^2 \leqslant x\right) = 0$,
- si $0 \leqslant \sqrt{x} \leqslant 2a$, *i.e.* $0 \leqslant x \leqslant 4a^2$, alors $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) = \dfrac{\left(\sqrt{x}\right)^2}{4a^2} = \dfrac{x}{4a^2}$,
- si $\sqrt{x} > 2a$, *i.e.* $x > 4a^2$, alors $G(x) = F\left(\sqrt{x}\right) = 1$.

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $G(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \dfrac{x}{4a^2} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4a^2, \\ 1 & \text{si } x > 4a^2. \end{cases}$

b) Comme pour tout $x \in [0, 4a^2]$, $G(x) = \dfrac{x}{4a^2} = \dfrac{x-0}{4a^2-0}$,
je reconnais en G la fonction de répartition de la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4a^2]$. Et puisque la fonction de répartition caractérise la loi, alors la variable aléatoire Y suit une loi uniforme sur l'intervalle $[0, 4a^2]$.

c) La commande `rand()*4*a∧2` simule le choix aléatoire d'un réel uniformément entre 0 et $4a^2$. Il s'agit là de simuler un tirage de la variable aléatoire Y.

d) En me servant de la simulation de la variable aléatoire Y, alors la commande `sqrt(rand()*4*a∧2)` simule un tirage de la variable aléatoire X.

7. a) Je calcule l'espérance de T_n. Comme pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, $E(X_k) = E(X) = \dfrac{4a}{3}$, alors par linéarité

$$E(T_n) = E\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} E(X_k) = \frac{3}{4n} \times n \times \frac{4a}{3} = a.$$

Ainsi j'ai bien montré que T_n est un estimateur sans biais de a.

b) Comme l'estimateur T_n est sans biais, le risque quadratique est donné par la variance : $r(T_n) = V(T_n)$. Je calcule donc $V(T_n)$. Comme les variables $X_1, X_2, \dots, X_n$ sont mutuellement indépendantes, alors

$$V(T_n) = V\left(\frac{3}{4n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{3^2}{(4n)^2}\sum_{k=1}^{n} V(X_k) = \frac{9}{16n^2}\sum_{k=1}^{n} V(X) = \frac{9}{16n^2} \times n \times 2a^2 = \frac{9a^2}{8n}.$$

c) Voici le script complété.

```
n=length(X)
T_n=3/(4*n)*sum(X)
disp(T_n)
```