

## Mathématiques – option technologique

### Conception BSB

### Session 2021

#### 1 - Sujet proposé

Le sujet proposé aux candidats était constitué de 4 exercices recouvrant une très large partie du programme des deux années.

- Exercice 1 – Algèbre linéaire. Notion de matrice idempotente. Étude de quelques propriétés puis application au calcul des puissances d'une matrice.
- Exercice 2 – Analyse. Étude de la fonction définie par  $f(x)=\ln(x^2+x+1)$ . Limites, variations, convexité, étude de certains points particuliers, représentation graphique.
- Exercice 3 – Probabilités discrètes. Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Calcul de la probabilité qu'un joueur atteigne une certaine cible au bout de  $n$  tentatives. Simulation informatique. Calcul du gain moyen du forain selon la stratégie des joueurs.
- Exercice 4 – Probabilités. Étude d'une variable aléatoire à densité. Recherche de sa fonction de répartition. Utilisation d'une loi exponentielle pour calculer son espérance.

#### 2 – Barème, attentes du jury

L'objectif de l'épreuve est de valoriser les étudiants ayant travaillé avec sérieux et ayant fait un effort de compréhension des démarches mathématiques mises en œuvre pendant leurs deux années de préparation. Les exercices sont souvent proches de ceux que les candidats n'ont pas manqué de rencontrer avec leur professeur. On ne cherche pas à piéger les candidats. Ainsi, les résultats intermédiaires sont le plus souvent donnés afin de permettre à un étudiant ayant échoué à une question de poursuivre l'exercice. Quelques questions, plus difficiles, permettent de valoriser les meilleurs candidats.

La répartition des points attribués entre les exercices était la suivante :

Exercice 1 : 22,5%, Exercice 2 : 29%, Exercice 3 : 26%, Exercice 4 : 22,5%

Le sujet était long et les correcteurs en ont tenu compte.

### 3 – Remarques de correction

Les correcteurs ont remarqué une très grande hétérogénéité des prestations. Le niveau global des copies n'est pas bon. La nette dégradation du niveau constatée l'an passé s'est confirmée. Les périodes de confinement que les étudiants ont subies durant leurs deux années de préparation expliquent sans doute en partie cette baisse.

Il y a très peu de copies excellentes. Toutefois, afin d'utiliser au maximum le barème, les correcteurs ont décidé d'attribuer la note maximale de 20 aux meilleures copies. Cela correspond à un peu moins de 5% des candidats.

On rencontre aussi un grand nombre de notes très basses : environ un quart des candidats obtiennent une note strictement inférieure à 6. Ces notes sont obtenues par des candidats en perdition et dont le niveau de compréhension est très faible voire parfois inexistant. Ces candidats ne maîtrisent en général pas les bases de calcul du collège (fractions – puissances – règles de priorité – parenthèses) et ont sans doute très peu mis à profit les 6h de cours hebdomadaires dont ils ont bénéficié pendant leurs deux années de classe préparatoire.

Nous organisons les remarques que l'on peut faire sur le sujet par compétences (cf. programme officiel).

#### Communiquer par écrit

La présentation des copies est trop souvent mauvaise, y compris parmi les meilleures : ratures, manque de soin dans l'écriture, orthographe défailante. Trop peu de candidats mettent en valeur leurs résultats ce qui rend les copies difficiles à lire surtout avec beaucoup de ratures.

Les résultats intermédiaires étant souvent donnés les tentatives d'escroquerie pour les obtenir à tout prix sont nombreuses. Elles sont bien sûr sanctionnées par les correcteurs.

#### Interpréter

Cette compétence n'est que rarement acquise. Trop d'étudiants manquent de bon sens et peinent à analyser leurs résultats. Ainsi dans l'exercice de probabilités certaines réponses pourtant évidentes n'ont pas été trouvées par les candidats. Beaucoup de candidats sont capables d'obtenir des résultats contradictoires d'une question à l'autre sans s'en émouvoir. Pour obtenir coûte que coûte un résultat donné dans l'énoncé beaucoup contredisent leurs résultats précédents.

De même il n'est pas rare de rencontrer des candidats qui trouvent des probabilités supérieures à 1 voire négatives !

#### Rechercher et mettre en œuvre des stratégies adéquates

La plupart des étudiants arrivent à reproduire des séquences vues en classe durant leurs deux années de préparation mais ils le font souvent sans maîtriser les concepts mathématiques qui y sont liés et préfèrent réciter par cœur plutôt que de s'adapter à l'énoncé de l'exercice qu'ils traitent. Beaucoup d'étudiants ont du mal à comprendre l'enchaînement des questions et ne mettent pas à profit les résultats des questions précédentes pour répondre à la question suivante.

Les étudiants lisent souvent trop vite l'énoncé. Ainsi dans l'exercice 1 la première question traitait d'un cas particulier qui était généralisé dans la suite mais la plupart des candidats ont conservé la matrice donnée en exemple dans toute la suite de l'exercice.

On note encore cette année des étudiants « hors-sujet » plaquant sur une question une « recette » apprise par cœur mais inadaptée à la question posée.

## Modéliser

Les questions d'informatique ont été plus abordées que les années précédentes ; avec un certain succès. La typographie de ce langage n'est pas toujours maîtrisée. La rédaction d'un programme informatique nécessite beaucoup de rigueur et de précision ; qualités qui font défaut dans trop de copies. Une des questions d'informatique était une question de cours (le principe de dichotomie). Elle a été correctement traitée dans moins de 10 copies sur 806.

On peut noter également que très peu de candidats sont capables de tracer la représentation graphique d'une fonction simple ni même de tracer une droite donnée par son équation.

## Maîtriser les concepts et les techniques mathématiques

Curieusement, les étudiants sont plus à l'aise avec les concepts qui n'ont été abordés qu'en classe préparatoire (matrices, calcul intégral, variables aléatoires à densité). En revanche, certaines lacunes du lycée voire du collège n'ont pas été comblées.

En mathématiques, donner un résultat, même juste, sans le démontrer ne peut pas être suffisant. De la même manière les théorèmes du cours s'appliquent lorsque certaines conditions sont vérifiées. Il y a trop de confusions dans la vérification de ces hypothèses.

On note également un nombre important de candidats (environ un quart) en difficulté sur des notions de collège : mise au même dénominateur, factorisation, règles de priorité, confusion entre les opérations. Savoir manipuler des parenthèses dans un calcul devient une qualité rare. Il est pour le moins inquiétant de voir qu'un grand nombre de futurs managers est en difficulté pour simplifier une somme de deux fractions ou l'expression  $1-(-1)$ .

## 4 – Commentaires par exercices

### Exercice 1

C'est l'exercice le plus abordé et le mieux réussi. Les étudiants maîtrisent plutôt bien le calcul matriciel. Le raisonnement par récurrence est également bien acquis même si la rédaction de celui-ci est parfois trop imprécise.

Dans la question 1 les candidats ont compris qu'il fallait calculer  $M^2$  ; mais nombreux sont ceux qui ne justifient pas leurs calculs ou qui se trompent. En particulier on peut voir que la manipulation des fractions est défailante chez trop d'étudiants.

La question 2 est souvent mal traitée, soit par un manque de maîtrise de la notion de polynôme annulateur, soit par utilisation de l'exemple pour démontrer une propriété générale. Le 2.c) n'est abordé correctement que dans les meilleurs copies (quelques dizaines). La plupart des autres candidats utilisent la matrice de l'exemple.

La question 3.a) est décevante. A peine plus de la moitié des candidats obtient la note maximale sur cette question pourtant facile. En cause, de grosses erreurs de calcul. On rencontre régulièrement une matrice  $I_2$  dont les coefficients diagonaux sont égaux à 2 au lieu de 1.

La récurrence de 3.b) est souvent repérée mais rares sont les étudiants à obtenir la totalité des points. Dans l'initialisation l'égalité  $C+D=I_2$  est rarement justifiée. On trouve également souvent  $2^0=I_2$ . Le calcul des coefficients de  $B^n$  démontre la fragilité des candidats sur la manipulation des puissances.

Le calcul de  $P^2$  est correct dans 3.c) mais les étudiants peinent à en déduire l'inversibilité et reviennent au calcul du déterminant. La question 3.d) n'a pas posé de problème aux étudiants qui ont correctement calculé l'inverse de  $P$ . La récurrence du 3.e) est le plus souvent bien traitée.

Enfin, la question 3.f) n'a été réussie que par quelques de candidats. Les tentatives d'escroquerie sont trop nombreuses et sont bien sûr sanctionnées.

## Exercice 2

Cet exercice montre que les questions usuelles d'analyse ne sont pas maîtrisées par la plupart des candidats. Les propriétés de la fonction logarithme sont souvent mal connues. Le lien entre signe de la dérivée et variations de la fonction n'est pas compris par un grand nombre de candidats. Les propriétés élémentaires d'une fonction polynôme de degré 2 ne sont pas connues.

La question 1 est traitée correctement par moins de la moitié des candidats. Les arguments avancés pour justifier de la positivité de  $x^2+x+1$  sont le plus souvent farfelus (beaucoup de  $x^2 > x$ , ou d'invocation des croissances comparées). Trop de candidats se justifient à partir de quelques valeurs de  $x$ . Certains candidats qui pensent à calculer le discriminant ne savent pas conclure.

La limite de  $\ln(x)$  en l'infini est bien connue. Par contre l'obtention des deux autres limites de la question 2 est difficile. Les justifications sont hasardeuses. Là encore, trop de candidats utilisent l'invocation du théorème de croissances comparées pour justifier tout et n'importe quoi.

En 3 le calcul de  $f(-1/2)$  n'aboutit que rarement à cause d'une mauvaise gestion des parenthèses. Les propriétés du logarithme sont mal connues.

Les questions 4.a) et 4.b) sont le plus souvent traitées correctement mais les correcteurs ont été amenés à sanctionner des candidats dont le tableau de variation était incohérent avec les limites trouvées en 2.

La question 5.a) a souvent posé problème. Les propriétés du logarithme sont trop mal maîtrisées pour pouvoir résoudre correctement cette question. Certains candidats astucieux grappillent quelques points en vérifiant au moins que 0 et -1 sont bien solutions. En 5.b) la formule générale de l'équation d'une tangente n'est pas toujours connue. Beaucoup de candidats oublient  $y$ . On rappelle qu'une équation est constituée de deux membres : affirmer que  $-x-1$  est l'équation d'une tangente est donc faux.

La question 6.a) est souvent bien traitée. En revanche l'étude du signe de  $f''(x)$  est rarement traitée correctement. La simplification de la racine carrée de 12 pour aboutir aux points d'inflexion demandés a donné lieu à beaucoup de tentatives d'escroquerie.

Le mot « bijection » n'apparaît que rarement dans la question 7.a). Trop de candidats ont l'habitude de résoudre des équations du type  $f(x)=0$  et ne s'adaptent pas à l'énoncé.

La question 7.c) a joué son rôle sélectif et n'a été abordée que dans les excellentes copies.

L'algorithme de la dichotomie en 7.d) est une question de cours. Seulement quelques dizaines de candidats ont réussi cette question.

Dans une copie, la présence d'une bonne représentation graphique est valorisée car elle permet au correcteur de vérifier les capacités de synthèse et de compréhension du candidat. Hélas, les correcteurs ont trop peu eu l'occasion de voir des représentations graphiques et celles qu'ils ont vues étaient bien souvent fantaisistes. Il faut noter qu'un nombre important de candidats est en difficulté pour tracer la représentation graphique de la droite d'équation  $y=x$ .

## Exercice 3

La question 1.a) a permis aux correcteurs de voir qu'un grand nombre de candidats n'avait pas compris l'expérience. On trouve régulièrement des probabilités supérieures à 1. La question 1.b) indique que le résultat est  $5/8$  donc beaucoup de candidats arrivent à ce résultat mais très peu le justifient correctement.

La question 2 pourtant très classique est souvent très mal rédigée. La formule des probabilités totales est mal connue. Il y a beaucoup de confusions entre les événements et leurs probabilités.

La question d'informatique a été correctement traitée dans environ 25% des copies. La réponse à la question 3.b) est souvent donnée sans justification.

Dans les questions 4 et 5.b) les correcteurs s'étonnent que la formule donnant l'expression d'une suite géométrique soit si peu connue des candidats. Dans la question 4 beaucoup d'étudiants tentent (souvent sans succès) un raisonnement par récurrence. Les difficultés dans la manipulation des puissances et des parenthèses ne permettent pas aux candidats de traiter correctement les questions 5.a) et 5.c).

La question 6 a été souvent bien traitée. Toutefois les paramètres de la fonction grand() sont souvent fantaisistes.

Dans 7.a) les justifications sont peu convaincantes. Beaucoup de candidats justifient la probabilité  $1/8$  en évoquant les 8 secteurs de la cible C.

La loi binomiale est le plus souvent reconnue dans la question 7.b). Cependant la question est souvent traitée de manière incomplète : la présence d'un schéma de Bernoulli est mal justifiée ;  $X(\Omega)$  commence à 1 ; la loi binomiale n'a qu'un paramètre, etc. Il manque très souvent les parenthèses autour des fractions élevées à une puissance. L'espérance et la variance d'une loi binomiale sont bien connues des étudiants.

Les explications pour justifier la formule donnant G dans 7.d) sont rarement convaincantes.

## Exercice 4

C'est l'exercice le moins abordé. Près d'un tiers des candidats n'aborde pas cet exercice.

Dans la question 1.a) la positivité de  $f$  sur  $\mathbb{R}^+$  n'est presque jamais justifiée correctement. L'évocation de la positivité de l'exponentielle semble suffire pour beaucoup. Trop de candidats ne lisent pas correctement l'énoncé de la question 1.b) et se contentent de dire que la fonction est continue sauf peut-être en 0.

Dans la question 1.c) les correcteurs ont pu voir que le calcul intégral était rarement maîtrisé. Les primitives usuelles ne sont pas connues. Dans la question 1.d) la définition d'une densité est connue mais souvent de manière imprécise (on lit souvent «  $f$  doit converger vers 1 »). Pour le calcul de l'intégrale, trop peu d'étudiants font le lien avec le calcul précédent.

Dans la question 2 on rencontre beaucoup d'erreurs dans la définition de la fonction de répartition notamment sur les bornes de l'intégrale. La question 2.b) a donné lieu à beaucoup de tentatives d'escroquerie.

Le cours sur les lois exponentielles n'est pas toujours su, en particulier la densité. Les questions 3.b) et 3.c) ont été rarement abordées. Peu de candidats font le lien avec la question 3.a).

## 5 - Conseils aux futurs candidats

L'épreuve est conçue pour les étudiants sérieux qui ont travaillé avec régularité tout au long de leurs deux années de préparation. Il n'y a pas besoin d'être brillant en mathématiques pour réussir cette épreuve. Beaucoup d'étudiants visiblement en difficulté avec la matière réussissent à atteindre des notes entre 10 et 12 en repérant les questions « classiques » et en mettant à profit le travail sur les exercices « types » sur lesquels ils se sont entraînés pendant deux ans.

Hélas trop de candidats n'ont pas fait les efforts d'apprentissage suffisants pour arriver à cela.

Il est donc conseillé aux étudiants de connaître parfaitement les formules du cours ainsi que les énoncés des théorèmes fondamentaux et de s'entraîner sur les exercices qu'ils auront rencontrés durant leurs deux années de préparation. Ils sauront ainsi s'adapter aux exercices de cette épreuve en apportant la rigueur nécessaire dans les solutions et en respectant les notations qu'ils ont rencontrées tout au long de l'année.

La présence d'une bonne représentation graphique est valorisée dans les copies. On invite les candidats à s'entraîner toute l'année à tracer l'allure de courbes afin d'être capables de se lancer le jour de l'épreuve. Il n'est pas normal qu'à l'issue de deux années de classe préparatoire aussi peu d'étudiants soient capables de tracer une droite à partir de son équation.

Les questions d'informatique sont bien dotées en points et ne nécessitent pas un investissement considérable. Il ne faut pas négliger cette partie du programme.

Le jour de l'épreuve, on invite les candidats à lire en entier l'énoncé de chacun des exercices avant de commencer à les résoudre. Cela permet d'en comprendre l'articulation. L'enchaînement des questions répond à une logique qui peut guider le candidat. La logique, la cohérence, l'absence de contradictions, mais aussi le soin apporté à la copie entrent pour une part importante dans l'appréciation des correcteurs.

Enfin, en cas d'erreur, les candidats sont invités à rayer **à la règle** les éléments faux et non à les raturer dans tous les sens.

## 6 – Notes moyennes obtenues

	Note moyenne	Barème
<b>Exercice 1</b>	3,76	4,5
<b>Exercice 2</b>	2,61	5,8
<b>Exercice 3</b>	2,37	5,2
<b>Exercice 4</b>	1,48	4,5
<b>Total</b>	10,23	20

Cette année, les notes vont de 0,1 à 20. La moyenne est de 10,23 ; l'écart-type est de 5,22. Enfin, 40 candidats obtiennent la note 20.

	2020	2021
<b>Nombre de candidats notés</b>	845	806
<b>Moyenne</b>	10,28	10,23
<b>Ecart-type</b>	5,45	5,22