Code sujet : 285

BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Conception : ESCP BS

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Jeudi 30 avril 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
On rappelle que :

- *la probabilité d'un événement B est notée P(B) et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(B)$ la probabilité conditionnelle de B sachant C ;*
- *l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z.*

Exercice 1

On note I la matrice identité de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et on considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$.

1) a) Montrer que $A^3 - 3A^2$ est proportionnelle à I.
   b) En déduire que A est inversible, puis exprimer la matrice A^{-1} en fonction de A et de A^2.
   c) Écrire une instruction `Scilab` permettant de saisir la matrice A.
   d) En utilisant la question 1b), proposer une instruction `Scilab` qui permet de calculer A^{-1}.
   e) Donner une instruction `Scilab`, différente de la précédente, permettant aussi de calculer A^{-1}.

2) On rappelle que, par convention, $A^0 = I$. Justifier que, pour tout entier n supérieur ou égal à 3, on a $A^n = 3A^{n-1} + \frac{9}{4}A^{n-3}$, puis compléter le script Scilab suivant afin qu'il permette de saisir A, puis de calculer et d'afficher A^n pour une valeur de n supérieure ou égale à 2 entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez une valeur pour n : ')
I=[1,0,0 ; 0,1,0 ; 0,0,1]
A=[---;---;---]
B=A^2
  for k=3:n
    C=3*B+(9/4)*I
    I=---
    A=---
    B=---
  end
disp(B)
```

3) *On admet* que la matrice A possède au moins une valeur propre.

a) Montrer que, si λ est une valeur propre de A, alors on a : $\lambda^3 - 3\lambda^2 - \frac{9}{4} = 0$.

b) Dresser le tableau de variation de la fonction f définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$$

c) En déduire que A ne possède qu'une seule valeur propre, notée λ_0, et la placer entre deux entiers consécutifs.

4) On souhaite démontrer, à l'aide d'un raisonnement par l'absurde, que A n'est pas diagonalisable. On suppose donc que A est diagonalisable, c'est-à-dire qu'il existe une matrice inversible P et une matrice diagonale D telles que $D = P^{-1}AP$.

a) Montrer que $D^3 - 3D^2 - \frac{9}{4}I = 0$, puis en déduire la matrice D.

b) Conclure.

Exercice 2

On effectue une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$.

On considère la variable aléatoire X, égale au rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire Y, égale au rang d'apparition du premier "face".

1) Donner la loi commune à X et Y, ainsi que les valeurs de l'espérance et de la variance de la variable aléatoire X.

2) Que vaut $P([X=1] \cap [Y=1])$? En déduire que X et Y ne sont pas indépendantes.

3) a) Montrer que, pour tout entier j supérieur ou égal à 2, $P([X=1] \cap [Y=j]) = P(Y=j)$.

b) Montrer que, pour tout entier i supérieur ou égal à 2, $P([X=i] \cap [Y=1]) = P(X=i)$.

c) En déduire la loi de probabilité de la variable aléatoire XY. On précisera $(XY)(\Omega)$.

d) Montrer que l'espérance de XY existe, puis donner sa valeur.

e) Calculer la covariance de X et Y. En déduire que la variance de $X+Y$ est égale à 2.

4) a) Déterminer la loi de probabilité de la variable aléatoire $X+Y$. On précisera $(X+Y)(\Omega)$.

b) Montrer que les variables aléatoires $X+Y$ et $XY+1$ sont de même loi.

5) On décide de coder "pile" par 1 et "face" par 0.
Compléter le script `Scilab` suivant afin qu'il permette le calcul et l'affichage des valeurs prises par les variables aléatoires X et Y lors de l'expérience réalisée dans cet exercice.

```
x=---
y=---
lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
if lancer==1  then
                    while  lancer==1
                    lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
                    y=---
                    end
          else
                    while  lancer==0
                    lancer=grand(1,1,'uin',0,1)
                    x=---
          end
disp(x)
disp(y)
```

Exercice 3

On considère la fonction f définie par :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

On ne cherchera pas à déterminer explicitement $f(x)$.

1) a) Soit x un réel supérieur ou égal à 1.
Minorer $\frac{1}{t}$ pour tout t de $[1,x]$, puis montrer que, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a : $f(x)\geq \frac{e^x-e}{x}$.

b) En déduire $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

c) Justifier l'existence, sur $[1,+\infty[$, de la dérivée f' de la fonction f et montrer que, pour tout x de $[1,+\infty[$, on a : $f'(x)=\frac{e^x}{x}$.

d) Montrer que la fonction f est convexe sur $[1,+\infty[$.

e) Quelle est l'équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1 ?

Dans la suite, on se propose de montrer que $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)e^{-x}=1$.

2) a) Dresser le tableau de variation de la fonction g définie par :

$$\forall t \in [1,+\infty[,\ g(t)=\frac{e^t}{t^3}$$

b) En déduire l'encadrement : $0\leq \int_1^3 g(t)\,dt \leq 2e$.

Tournez la page S.V.P.

c) Montrer que, pour tout réel x supérieur ou égal à 3, on a l'encadrement :

$$0 \leq \int_3^x g(t)\,\mathrm{d}t \leq \frac{x-3}{x^3}\mathrm{e}^x$$

3) a) Grâce à une intégration par parties, montrer que, pour tout réel x de $[1,+\infty[$, on a :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} - \mathrm{e} + \int_1^x \frac{\mathrm{e}^t}{t^2}\,\mathrm{d}t$$

b) À l'aide d'une deuxième intégration par parties, établir l'égalité suivante :

$$\forall x \in [1,+\infty[,\ f(x) = \frac{\mathrm{e}^x}{x} + \frac{\mathrm{e}^x}{x^2} - 2\mathrm{e} + 2\int_1^x g(t)\,\mathrm{d}t$$

4) a) Utiliser les questions précédentes pour déterminer un encadrement de $f(x)$ qui soit valable pour tout réel x de $[3,+\infty[$.

b) En déduire que $\lim\limits_{x\to+\infty} x f(x)\mathrm{e}^{-x} = 1$.

Exercice 4

Les questions 4, 5 et 6 sont indépendantes des questions 1, 2 et 3.

Un mobile se déplace sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine O.
Au départ, le mobile est à l'origine (point d'abscisse 0). Le mobile se déplace selon la règle suivante : s'il est sur le point d'abscisse $k-1$ ($k \in \mathbb{N}^*$) à l'instant n ($n \in \mathbb{N}$), alors, à l'instant $n+1$, il sera sur le point d'abscisse k avec la probabilité $\dfrac{k}{k+1}$, ou sur le point d'abscisse 0 avec la probabilité $\dfrac{1}{k+1}$.

Pour tout n de $\mathbb{N}$, on note A_n la variable aléatoire égale à l'abscisse de ce point à l'instant n.
On a donc $A_0 = 0$.

On note U l'instant auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine (sans compter son positionnement au départ) et on admet que U est une variable aléatoire. On convient que U prend la valeur 0 si le mobile ne revient jamais en O.
Voici deux exemples :
- Si les abscisses successives du mobile *après* son départ sont $A_1 = 0$, $A_2 = 0$, $A_3 = 1$, $A_4 = 2$, $A_5 = 0$, $A_6 = 0$, alors l'événement $(U = 1)$ est réalisé.
- Si les abscisses successives du mobile *après* son départ sont $A_1 = 1$, $A_2 = 2$, $A_3 = 3$, $A_4 = 0$, $A_5 = 0$, $A_6 = 1$, alors l'événement $(U = 4)$ est réalisé.

1) a) Justifier que, pour tout i de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = i) = \frac{i}{i+1} \quad \text{et} \quad P_{(A_{i-1}=i-1)}(A_i = 0) = \frac{1}{i+1}$$

b) Pour tout k de $\mathbb{N}^*$, exprimer l'événement $(U = k)$ en fonction d'événements mettant en jeu certaines des variables aléatoires A_i.

c) Sans chercher à trouver la loi des variables aléatoires $A_1, \ldots, A_k$, déduire des questions précédentes que :

$$\forall k \in \mathbb{N}^*,\ P(U = k) = \frac{1}{k(k+1)}$$

d) Simplifier $\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$, puis vérifier que $\sum_{k=1}^{+\infty} P(U=k)=1$.

e) En déduire la valeur de $P(U=0)$.

2) Montrer que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a : $P(U>n)=\frac{1}{n+1}$.

3) On rappelle que, si j est un entier naturel non nul, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,j)` renvoie aléatoirement un entier compris entre 1 et j.
Compléter les commandes du script `Scilab` suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur prise par U lors de l'expérience aléatoire étudiée.

```
k=1
hasard=grand(1,1,'uin',1,k+1)
while hasard ------
k=k+1
hasard= ------
end
disp(k,' U a pris la valeur :')
```

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{(x+1)^2} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

4) a) Vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire T qui admet f pour densité.

b) Montrer que la fonction de répartition de T est la fonction F définie par :

$$F(x)=\begin{cases}\frac{x}{x+1} \text{ si } x \geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0\end{cases}$$

5) On appelle partie entière du réel x, notée $\lfloor x \rfloor$, le plus grand entier inférieur ou égal à x.
On a ainsi : $\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor +1$. Par exemple, si $x=4.7$, alors $\lfloor x \rfloor=4$, et si $x=6$, alors $\lfloor x \rfloor=6$.
On pose $N=\lfloor T \rfloor+1$ et on admet que N est une variable aléatoire.

a) Montrer que N prend ses valeurs dans $\mathbb{N}^*$, puis justifier que, pour tout n de $\mathbb{N}^*$, on a :

$$P(N=n)=P(n-1 \leq T < n)$$

b) En déduire :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(N=n)=\frac{1}{n(n+1)}$$

c) Expliquer pourquoi le script `Scilab` de la question 3) donne une simulation de N.

6) a) Soit k un entier supérieur ou égal à 1. Montrer que :

$$\int_k^{k+1} \frac{1}{t}\,dt \leq \frac{1}{k}$$

b) La variable aléatoire N possède-t-elle une espérance ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1072 – D'après documents fournis