BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

RAPPORT DE CORRECTION

DE MATHÉMATIQUES option T

Conception ESCP Europe

Concours 2020

SOMMAIRE

Présentation de l'épreuve

L'épreuve, assez longue comme d'habitude, comportait quatre exercices, ce qui permettait de juger les candidats sur la presque totalité du programme de l'épreuve : algèbre linéaire, analyse et probabilités. Les correcteurs ont trouvé le sujet adapté mais aussi très sélectif, notamment au travers de certaines questions très difficiles, tout en respectant scrupuleusement le programme.

- L'exercice 1, portant sur le programme d'algèbre, proposait de démontrer que la matrice $A=\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1/2 & 1 & 2 \\ 1 & 1/2 & 1 \end{pmatrix}$ était inversible mais pas diagonalisable. Quelques instructions `Scilab` étaient demandées pour le calcul de A^{-1} et on proposait de compléter un script `Scilab` s'appuyant sur la relation $A^n=3A^{n-1}+\frac{9}{4}A^{n-3}$, et permettant le calcul de A^n.

- L'exercice 2, portant sur le programme de probabilités, avait pour objectif principal d'étudier deux variables aléatoires, *X* et *Y*, lors d'une succession de lancers (supposés indépendants) d'une pièce de monnaie équilibrée pour laquelle la probabilité d'obtenir "pile" vaut $\frac{1}{2}$ et celle d'obtenir "face" vaut également $\frac{1}{2}$. La variable aléatoire *X*, était le rang d'apparition du premier "pile" et la variable aléatoire *Y*, le rang d'apparition du premier "face". On se proposait à la fin de montrer que $X+Y$ et $XY+1$ suivaient la même loi. Ici aussi, on proposait de compléter un script `Scilab` permettant la simulation de *X* et *Y*.

- L'exercice 3, portant sur le programme d'analyse, proposait l'étude de la fonction f définie par :

$$\forall x\in [1,+\infty[\,,\quad f(x)=\int_1^x \frac{e^t}{t}\,dt$$

Après avoir déterminé les variations, les limites, et la convexité de *f*, on établissait, grâce à des encadrements et à deux intégrations par parties, la relation :

$$\lim_{x\to+\infty} x f(x)e^{-x}=1$$

- L'exercice 4, portant sur le programme de probabilités décrivait le déplacement d'un mobile sur les points à coordonnées entières positives d'un axe d'origine *O* avec un protocole tel que la loi de l'instant *U* auquel le mobile se trouve pour la première fois à l'origine était donnée par :

$$\forall k\in \mathbb{N}^*,\quad P(U=k)=\frac{1}{k(k+1)}$$

Ici aussi, on proposait de compléter un script `Scilab` permettant la simulation de *U*.

Ensuite, on considérait la fonction *f* définie par $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{(x+1)^2} & \text{si } x\geq 0 \\ 0 \text{ si } x<0 \end{cases}$ puis on faisait démontrer que *f* était une densité d'une certaine variable aléatoire *T*. On établissait enfin que la variable aléatoire *N*, définie par $N=\lfloor T\rfloor+1$, avait la même loi que *U*.

Barème/statistiques

- Les quatre exercices comptaient respectivement pour 24,5%, 23,3%, 23,9% et 28,3% des points de barème.
- Le poids des questions de Scilab représentait 17% des points de barème.

- Sur les 953 candidats ayant composé dans cette épreuve (1079 candidats en 2019), la note moyenne est de 9,04 (en très légère baisse par rapport à celle de 2019) avec un écart-type de 5,17 indiquant que les candidats ont été classés de manière satisfaisante.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 121, soit 12,7 % des candidats présents.
- Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 12 est de 258, soit 27,1 % des candidats présents.
- On compte 11 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20.
- La note médiane est de 8,3 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 6,1 et 12,6 respectivement.

Analyse des copies

Comme l'an dernier, le niveau est très hétérogène : les meilleurs ont acquis des techniques et des réflexes de bonne qualité (sans pour autant toujours bien maîtriser les concepts, notamment en probabilités) et les moins bons semblent dépassés par ce qui est demandé (alors pourtant que le sujet était émaillé de questions classiques et, pour certaines, pas vraiment difficiles).
Les copies sont, à de pénibles exceptions près, agréablement présentées et bien rédigées. Rappelons qu'un correcteur ne passe pas de longues minutes à tenter de déchiffrer un passage illisible ou presque sur une copie, il est donc essentiel d'adopter une présentation claire, simple et honnête.

En ce qui concerne la crédibilité des copies, signalons les quelques points suivants pour lesquels elle est mise à mal :

Exercice 1

- En grande majorité, les candidats ont interprété « proportionnelle à I » comme « égale à I », ce qui a donné lieu à de nombreuses contorsions… Il était pourtant possible de s'apercevoir de sa bévue en lisant les deux premières lignes de la question 2).
- La pratique des calculs numériques pose vraiment un problème à de trop nombreux candidats.

Par exemple, on a vu un grand nombre de fois le résultat de $\frac{45}{4}-9$ donné égal à $\frac{36}{4}$, soit 9.

- Le calcul de la dérivée de $x \mapsto x^3 - 3x^2 - \frac{9}{4}$ a posé des problèmes à certains candidats et, quand il a été correct, l'étude du signe de $3x^2 - 6x$ a, à son tour décontenancé plus d'un candidat !
Il est à noter que pour quelques candidats, le signe de cette différence a été traité comme le signe d'un produit.
- De très nombreux candidats se sont mis dans la tête de montrer que $D = A$…

Exercice 2

- Beaucoup de candidats ne reconnaissent pas une loi géométrique et proposent une loi binomiale, alors que l'énoncé ne définit pas un nombre précis de lancers. Pour ceux qui ont reconnu la loi géométrique de paramètre *p*, les formules donnant espérance et variance étaient parfois fausses et parfois mal utilisées.
- Un candidat a évoqué la possibilité que la pièce tombe sur la tranche lors de l'analyse de l'événement $(X = 1) \cap (Y = 1)$!
- De trop rares candidats ont réellement réfléchi et donné la bonne explication aux égalités probabilistes des questions 3a) et 3b).
- Les formules donnant la covariance de deux variables aléatoires et la variance d'une somme sont fausses sur un nombre conséquent de copies.

Exercice 3

- Les correcteurs s'attendaient à ce que la dérivée de la fonction *f* soit incorrectement justifiée, mais en revanche, ils ont été bien plus surpris de lire une dérivée fausse pour la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x}$, de même que pour la fonction $x \mapsto \frac{e^x}{x^3}$.
- On a vu trop souvent rejaillir la phrase fatale : « la fonction *f* est continue donc dérivable ».
- Pour finir sur les dérivées, il est louable que leur calcul soit correct mais il est dommage que l'absence de factorisation rende l'étude de leur signe fantaisiste, voire surréaliste.
- Les intégrations par parties ont été réussies par une majorité de candidats (parmi ceux qui savent dériver) mais les questions suivantes les ont désarçonnés presque tous.

Exercice 4

- Les résultats de la question 1a) étant donnés, ils ont été trop souvent « truandés ».
- La formule des probabilités composées pose problème à presque tous les candidats.
- Le calcul de $\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}$ s'est avéré faux sur de nombreuses copies !
- Pour la question 3), il est étonnant de constater que beaucoup de candidats ne savent pas donner une primitive de la fonction *f* : $x \mapsto \frac{1}{(x+1)^2}$. Ils l'ont inventée en lisant la question 4b) !

Conclusion

L’épreuve a permis de repérer et de mettre en valeur les candidats les mieux préparés (il y en a de très bons) et les plus aptes à trouver leur place dans des études exigeantes qui nécessitent rigueur et honnêteté intellectuelle.

Nous conseillons, comme par le passé, aux futurs candidats de se préparer d’une façon complète, en essayant de ne négliger aucun point des trois "compartiments" du programme : analyse, algèbre linéaire et probabilités. Il n’est pas nécessaire de « tirer dans les coins » lors des révisions mais il faut surtout consolider les connaissances de base, les calculs (numériques ou de dérivées) et les méthodes classiques : on pouvait avoir une note honorable en ne traitant bien que les questions simples de cette épreuve, c’est-à-dire celles pour lesquelles, à leur lecture, on sait que l’on devrait savoir la faire.