CORRIGÉ

EXERCICE 1

Partie A

1.
```
n = input('Entrer n : ')
u = 0 ; v = 1
for k = 1:n                   // ou  for k = 2:n+1
        w = u
        u = v
        v = 7*v+8*w      //  ou    v = 7*u+8*w
end
disp(u)
```

2.
$$\forall n \in \mathbb{N},\ s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = (7u_{n+1} + 8u_n) + u_{n+1} = 8(u_{n+1} + u_n) = 8s_n$$

Ainsi : $\forall n \in \mathbb{N},\ s_n = s_0 8^n = (u_0 + u_1)8^n = 8^n$.

3. (a) Pour $n \in \mathbb{N}, t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n (u_n + u_{n+1}) = (-1)^n s_n$.

(b) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a donc $t_n = (-1)^n 8^n = (-8)^n$.

4. (a) Pour $n \geqslant 1$, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1 - (-8)^n}{1+8} = \frac{1 - (-8)^n}{9}$.

(b) En reconnaissant une somme télescopique, $\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1} (v_i - v_{i+1}) = v_0 - v_n = 0 - v_n = -v_n$.

(c) On en déduit que :
$$\forall n \geqslant 1, v_n = -\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{(-8)^n - 1}{9}$$
puis que :
$$\forall n \in \mathbb{N},\ u_n = (-1)^n v_n = \frac{8^n - (-1)^n}{9} = \frac{8^n + (-1)^{n+1}}{9}$$

Partie B

1. On a $M^2 = \begin{pmatrix} 22 & 21 & 21 \\ 21 & 22 & 21 \\ 21 & 21 & 22 \end{pmatrix} = 7M + 8I$.

Comme $M^2 - 7M - 8I = 0$, le polynôme $Q(X) = X^2 - 7X - 8$ est bien annulateur de M.

2. On a en particulier :
$$M^2 - 7M = 8I \Longrightarrow M\left(\frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I\right) = I$$
Donc M est inversible et $M^{-1} = \frac{1}{8}M - \frac{7}{8}I$.

3. (a) $M^0 = I$ et par ailleurs $0M + 1I = I$, donc on a bien $M^0 = a_0M + b_0I$.

   (b) Les réels $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$ conviennent de manière évidente : $M^1 = 1 \cdot M + 0 \cdot I$.

   (c) Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons qu'il existe deux réels a_n et b_n tels que : $M^n = a_nM + b_nI$. Alors :
$$M^{n+1} = M^n \cdot M = (a_nM + b_nI) \cdot M = a_nM^2 + b_nM = a_n(7M + 8I) + b_nM$$
   En développant, on a alors :
$$M^{n+1} = (7a_n + b_n)M + (8a_n)I$$
   En posant donc $a_{n+1} = 7a_n + b_n$ et $b_{n+1} = 8a_n$, on obtient bien : $M^{n+1} = a_{n+1}M + b_{n+1}I$.

   (d)
   - Pour $n = 0$, on a $a_0 = 0$.
   - Pour $n = 1$, on a $a_1 = 1$.
   - Puis pour tout $n \geqslant 1$,
$$a_{n+1} = 7a_n + b_n = 7a_n + 8a_{n-1}$$
   Ainsi, la suite (a_n) vérifie exactement la définition de la suite (u_n). On a donc :
$$\forall n \in \mathbb{N}, a_n = u_n$$

Partie C

1. Si le tableau représente bien une loi de couple, alors nécessairement a somme des cases fait 1. On doit donc avoir $24\beta = 1$, i.e. $\beta = \frac{1}{24}$.
2. Pour les lois marginales de X et Y, on obtient :

k	1	2	3
P(X=k)	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

   Donc X suit une loi uniforme sur $\{1, 2, 3\}$, et on obtient de même pour Y.
   On en déduit que $E(X) = E(Y) = \frac{1+3}{2} = 2$.

3. (a) On connait la loi du couple (X, Y)

$X \backslash Y$	1	2	3
1	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$
2	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$	$\frac{3}{24}$
3	$\frac{3}{24}$	$\frac{3}{24}$	$\frac{2}{24}$

On applique alors la formule de transfert donnant $E(XY)$:

$$\begin{aligned} E(XY) &= \sum_{\substack{i \in X(\Omega) \\ j \in Y(\Omega)}} i\ j\ P([X = i] \cap [Y = j]) \\ &= 1 \times \frac{2}{24} + 2 \times \frac{3}{24} + 3 \times \frac{3}{24} + 2 \times \frac{3}{24} + 4 \times \frac{2}{24} + 6 \times \frac{3}{24} + 3 \times \frac{3}{24} + 6 \times \frac{3}{24} + 9 \times \frac{2}{24} \\ &= \frac{47}{12} \end{aligned}$$

Donc :

$$\operatorname{cov}(X, Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = \frac{47}{12} - 4 = \frac{-1}{12}$$

(b) Comme $\operatorname{cov}(X, Y) \neq 0$, les variables X et Y ne peuvent pas être indépendantes.

EXERCICE 2

Partie A

1. Le discriminant du polynôme $X^2 + X + 1$ vaut $\Delta = -3 < 0$. Ainsi, l'équation $x^2 + x + 1 = 0$ n'admet aucune solution réelle.
2. On applique la règle des facteurs de plus haut degré :

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{1 + x + x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x \to \pm\infty} \frac{1}{x} = 0$$

3. La fonction f est dérivable en tant que fonction rationnelle, le dénominateur ne s'annulant jamais, et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f'(x) = \frac{1 \cdot (1 + x + x^2) - x \cdot (1 + 2x)}{(1 + x + x^2)^2} = \frac{1 - x^2}{(1 + x + x^2)^2}$$

Le signe de $f'(x)$ est donc celui de $1 - x^2 = (1 - x)(1 + x)$.

On en déduit le tableau de variations de f.

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$1/3$	$\searrow$	0

4. (a) Une équation de (T) est donnée par :

$$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$$

Comme $f(0) = 0$ et $f'(0) = 1$, (T) a pour équation $y = x$.

(b) Soit $x \geqslant -1$. On a :

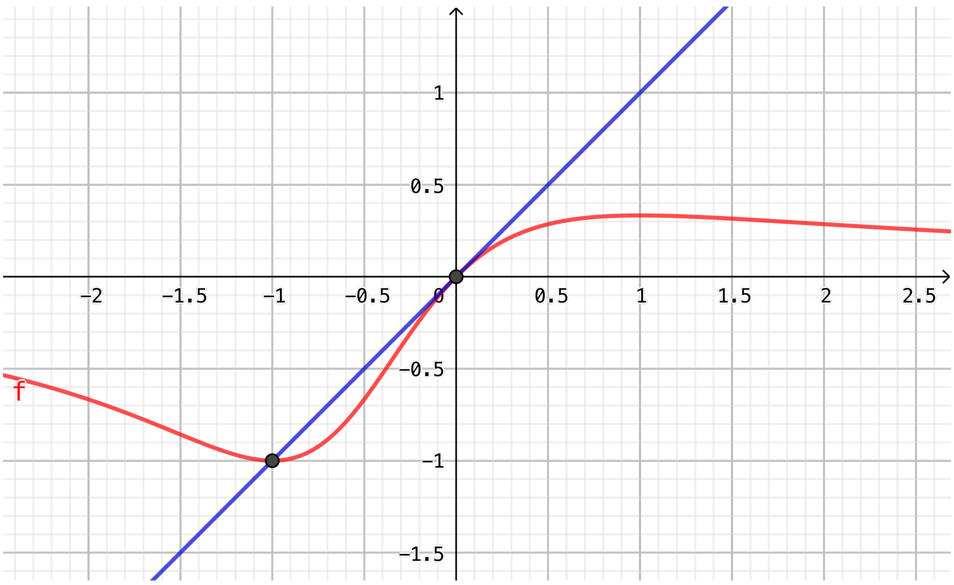
$$f(x) - x = \frac{x}{1 + x + x^2} - x = x\left(\frac{1}{1 + x + x^2} - 1\right) = x\frac{-x - x^2}{1 + x + x^2} = \frac{-x^2(1 + x)}{1 + x + x^2}$$

Comme $\forall x \in \mathbb{R},\ 1 + x + x^2 > 0$, on a donc :

$$\forall x \in [-1, +\infty[,\ f(x) - x \leqslant 0 \Longleftrightarrow f(x) \leqslant x$$

On en déduit donc que, sur l'intervalle $[-1, +\infty[$, la courbe $\mathcal{C}_f$ est située en-dessous de la droite d'équation $y = x$ (la tangente (T)).

5. Pour aller un peu plus loin l'étude précédente, le signe de $f(x) - x$ est le même que $-(1 + x)$.



Partie B

1. Pour $n \geqslant 1$, on a $f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n}}{1+\frac{1}{n}+\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}$.

   Comme $n+1+\frac{1}{n} \geqslant n+1 > 0$, par passage à l'inverse, on a :
$$f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n+1}$$

2.
   - On a bien $0 \leqslant u_1 \leqslant 1$.
   - Soit $n \geqslant 1$. Supposons qu'on ait $0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.
     La fonction f est croissante sur $[-1,1]$, donc sur $[0,1/n]$, donc :
$$f(0) \leqslant f(u_n) \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right)$$
     Donc on obtient :
$$0 \leqslant u_{n+1} \leqslant f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}$$
   - Par récurrence, on a donc bien : $\forall n \in \mathbb{N}^*, 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}$.

3. Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, on en déduit par théorème d'encadrement que la suite (u_n) est convergente, de limite 0.

4.
```
function y=f(x)
        y = x/(1+x+x^2)
endfunction
u = 1
n = 1
while u > 1/1000
        u = f(u)
        n = n+1
end
disp(n)
```

Partie C

1.
   - Si $v_1 = -2$, on a $v_2 = \frac{-2}{1+(-2)+4} = \frac{-2}{3} \in [-1,0]$.
   - Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $-1 \leqslant v_n \leqslant 0$.
     Comme f est croissante sur $[-1,0]$, on a $f(-1) \leqslant f(v_n) \leqslant f(0)$, autrement dit $-1 \leqslant v_{n+1} \leqslant 0$.
   - Par récurrence, on a bien : $\forall n \geqslant 2,\ -1 \leqslant v_n \leqslant 0$.

2. Pour tout $n \geqslant 2$, on a :
$$v_{n+1} - v_n = f(v_n) - v_n \leqslant 0 \quad \text{car } \forall x \in [-1,0], f(x) \leqslant x \text{ et } v_n \in [-1,0]$$
   Ainsi, la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.

3. La suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est donc décroissante (à partir du rang 2), et minorée par -1 (à partir du rang 2), donc (v_n) est convergente.
4. D'après le graphique obtenu, il semblerait que $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -1$.
5. (a)

$$f(x) = -1 \iff \frac{x}{1+x+x^2} = -1 \iff x = -1-x-x^2 \iff x^2+2x+1 = 0 \iff (x+1)^2 = 0 \iff x = -1$$

L'équation admet donc une unique solution : -1.

(b) Supposons qu'il existe un rang $n \geqslant 1$ tel que $v_n = -1$.
Alors on aurait $f(v_{n-1}) = -1$, donc on aurait $v_{n-1} = -1$ d'après (a).
Mais alors on aurait $f(v_{n-2}) = -1$ d'après (a), donc $v_{n-2} = -1$.
En réitérant ce raisonnement, on obtient nécessairement que $v_n = v_{n-1} = \cdots = v_2 = -1$, ce qui est absurde, puisque $v_2 \neq 1$.
Ainsi, on a nécessairement $\forall n \geqslant 1,\ v_n \neq 1$.

EXERCICE 3

1. On a :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ F(x) = \begin{cases} 1 - e^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

et une densité peut être par exemple la fonction f donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} ae^{-ax} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

On a $E(X) = \dfrac{1}{a}$ et $V(X) = \dfrac{1}{a^2}$.

2. (a) L'événement $[T > x]$ se réalise si le client C attend au moins x minutes, donc si et seulement si les clients A et B ont eu chacun une opération qui a durée au moins x minutes :

$$[T > x] = [X > x] \cap [Y > x]$$

(b) Par indépendance des variables X et Y, on a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(T > x) = P([X > x] \cap [Y > x]) = P(X > x)P(Y > x)$$

On a donc :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ P(T > x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x < 0 \\ e^{-ax}e^{-bx} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

(c) On en déduit que pour tout réel x :

$$P(T \leqslant x) = 1 - P(T > x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ 1 - e^{-(a+b)x} & \text{si } x \geqslant 0 \end{cases}$$

On reconnaît une loi exponentielle de paramètre $a + b$.

(d) On veut ici : $P_{[T>2]}(T > 5) = \dfrac{\mathbb{P}([T > 2] \cap [T > 5])}{\mathbb{P}(T > 2)} = \dfrac{\mathbb{P}(T > 5)}{\mathbb{P}(T > 2)} = \dfrac{e^{-5(a+b)}}{e^{-2(a+b)}} = e^{-3(a+b)}$.

3. (a)
```
function T = simul(a,b)
        X = grand(1,10000,'exp',1/a)
        Y = grand(1,10000,'exp',1/b)
        T = X
        for k = 1:10000
                if Y(k) < X(k) then
                        T(k) = Y(k)
                end
        end
endfunction
a = input('a :  ')
b = input('b :  ')
T = simul(a,b)
```

(b) On utilise plutôt l'instruction `histplot(0:max(T),T)`, qui est plus adaptée aux variables aléatoires continues (`bar` fournit un diagramme en bâton, qui est plus adapté aux variables aléatoires discrètes.

4. (a) La fonction `simul2` permet de calculer la fréquence d'apparition de l'événement $[V > 2]$.

(b) C'est la loi faible des grands nombres qui permet d'affirmer ce phénomène.

5. (a) En posant pour tout $x \in [0, A]$:

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = x \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} u'(x) = 1 \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right. ,$$

on a par intégration par parties :

$$\int_0^A g(x)dx = \Big[-xe^{-x} \Big]_0^A - \int_0^A (-e^{-x})dx = -Ae^{-A} - \Big[e^{-x} \Big]_0^A = 1 - e^{-A} - Ae^{-A}$$

(b) On refait une intégration par parties en posant, pour tout $x \in [0, A]$:

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = x^2 \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right. , \quad \left| \begin{array}{l} u'(x) = 2x \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

On a donc :

$$\int_0^A xg(x)dx = \Big[-x^2e^{-x} \Big]_0^A + 2\int_0^A g(x)dx = -A^2e^{-A} + 2\left(1 - e^{-A} - Ae^{-A}\right)$$

(c) La fonction g est positive et continue sur $\mathbb{R}$ (on a $\lim\limits_{0^+} g = \lim\limits_{0^-} g$).

De plus, comme $\lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = 0$ par croissance comparée, on a d'après (a) :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A g(x)dx = 1$$

On en déduit donc que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

Comme l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^0 g(x)dx$ converge et vaut 0, on a donc bien que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(x)dx$ converge et vaut 1.

(d) $P(V \leqslant 2) = \displaystyle\int_0^2 g(x)dx = 1 - e^{-2} - 2e^{-2} = 1 - 3e^{-2}$.
On en déduit que $P(V > 2) = 3e^{-2} \simeq 0,42$.
C'est cohérent avec les résultats Scilab.

(e) D'après (b) sachant que $\lim_{A\to+\infty} A^2e^{-A} = \lim_{A\to+\infty} Ae^{-A} = 0$ par croissance comparée, on voit que :

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A xg(x)dx = 2$$

Autrement dit, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} xg(x)dx = \int_0^{+\infty} xg(x)dx$ converge et vaut 2.
Ainsi, V admet bien une espérance et $E(V) = 2$.

Remarque : on peut aussi simplement mentionner que $V = T + Z$, donc $E(V) = E(T) + (Z)$ par linéarité, et donc $E(V) = 1 + 1 = 2$.