BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 294

Conception : BSB Burgundy School of Business

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mardi 5 mai 2020, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

Exercice 1

On considère les matrices suivantes :

$$I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} ; B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} ; C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} ; D = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ; P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

1. a) Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
   b) Vérifier que le polynôme $X^2 - 2X$ est un polynôme annulateur de la matrice A. En déduire les valeurs propres possibles de A.
   c) Montrer que $U = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de A. A quelles valeurs propres sont-ils associés ?
   d) Justifier l'égalité $P^{-1}AP = C$.

2. a) Exprimer B en fonction de I_2 et A. Exprimer de même D en fonction de I_2 et C.
   b) En déduire que $P^{-1}BP = D$.

3. a) Montrer que pour tout entier naturel n on a : $P^{-1}B^nP = D^n$.
   b) Pour tout entier naturel n, donner les coefficients de D^n.
   c) Déduire de 3.a) et 3.b) que pour tout entier naturel n on a : $B^n = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 3^n + 1 & 3^n - 1 \\ 3^n - 1 & 3^n + 1 \end{pmatrix}$.

4. Antoine et Béatrice jouent au Badminton. On suppose que lors de chaque échange, le joueur qui a le service emporte le point avec une probabilité $\frac{2}{3}$ et le perd avec une probabilité $\frac{1}{3}$.

Tournez la page S.V.P.

On suppose que c'est Antoine qui a le service lors du premier échange. Ensuite, selon les règles de ce jeu, celui qui emporte l'échange marque un point et obtient le service pour l'échange suivant.

Pour tout entier naturel $n \geq 1$, on note A_n l'événement « Antoine gagne le n-ème échange » et B_n l'événement « Béatrice gagne le n-ème échange ». On note a_n et b_n leurs probabilités respectives.

a) Donner les valeurs de a_1 et b_1. Calculer a_2 et vérifier que $a_2 = \frac{5}{9}$.

b) On observe qu'Antoine emporte le deuxième échange. Quelle est la probabilité qu'il ait emporté le premier échange ?

c) Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$. Exprimer de même b_{n+1} en fonction de a_n et b_n pour tout entier $n \geq 1$.

d) Pour tout entier $n \geq 1$, on note X_n la matrice colonne $\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$. Vérifier que $X_{n+1} = \frac{1}{3}BX_n$.

e) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $X_n = \frac{1}{3^{n-1}}B^{n-1}X_1$.

f) Déduire de 3.c) que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $a_n = \frac{3^n + 1}{2 \times 3^n}$.

Déterminer de même une expression de b_n en fonction de n pour tout entier $n \geq 1$.

5. **Simulation informatique.**

On rappelle que l'instruction `a=grand(1,1,'bin',1,p)` simule une loi de Bernoulli de paramètre p. Ainsi si $p = \frac{2}{3}$ l'instruction `a=grand(1,1,'bin',1,2/3)` affecte à la variable a la valeur 0 avec la probabilité $\frac{1}{3}$ et la valeur 1 avec la probabilité $\frac{2}{3}$.
On utilise cette instruction pour simuler une partie de 20 échanges entre Antoine et Béatrice.

a) Recopier et compléter les lignes 4 et 5 du programme ci-dessous de telle sorte que lors de chacun des 20 échanges de la partie la variable a corresponde au point marqué par Antoine lors de cet échange (c'est-à-dire 1 ou 0).

b) Recopier et compléter les lignes 2 et 7 afin que la variable S calcule la somme des points obtenus par Antoine durant la partie.

```
1.  a=grand(1,1,'bin',1,2/3)
2.  S=...
3.  for i=2:20
4.      if a==1 then a=grand(......)
5.               else a=grand(......)
6.      end
7.      S=....
8.  end
9.  disp(S)
```

Exercice 2

Soit g la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $g(x) = x - \ln(x)$.

1. a) Montrer que la dérivée de g vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $g'(x) = \frac{x-1}{x}$.

b) Calculer $g(1)$.

c) Calculer $\lim_{x \to 0} g(x)$. Démontrer que $\lim_{x \to +\infty} g(x) = +\infty$.

d) Dresser le tableau des variations de g sur $]0;+\infty[$ en y faisant figurer les résultats obtenus aux questions 1.b) et 1.c).

e) Justifier que pour tout réel $x > 0$ on a : $g(x) > 0$.

2. Soit f la fonction définie sur $]0;+\infty[$ par : $f(x) = \dfrac{1}{g(x)} = \dfrac{1}{x - \ln(x)}$.

   a) Montrer que pour tout réel $x > 0$ on a : $f'(x) = \dfrac{1-x}{x(x-\ln(x))^2}$.

   b) Déduire de 1.c) les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 et $+\infty$.

   Donner une interprétation graphique de la limite de f en $+\infty$.

   c) Dresser le tableau des variations de f sur $]0;+\infty[$. On y fera figurer les limites obtenues à la question 2.b) ainsi que $f(1)$.

3. On cherche à résoudre l'équation $f(x) = x$ dans $]0;+\infty[$.

   a) Montrer que, pour tout réel $x > 0$, l'équation $f(x) = x$ est équivalente à l'équation : $x - \ln(x) - \dfrac{1}{x} = 0$.

   On pose donc pour tout réel $x > 0$: $h(x) = x - \ln(x) - \dfrac{1}{x}$.

   b) Montrer que la dérivée de h vérifie pour tout réel $x > 0$ l'égalité : $h'(x) = \dfrac{x^2 - x + 1}{x^2}$.

   En déduire le sens de variation de h sur $]0;+\infty[$.

   c) On donne : $\lim\limits_{x \to 0} h(x) = -\infty$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} h(x) = +\infty$. Dresser le tableau des variations de h.

   d) Déduire des questions précédentes que l'équation $f(x) = x$ admet une unique solution α dans $]0;+\infty[$.

   Calculer $f(1)$. En déduire la valeur de α.

4. Tracer l'allure de la représentation graphique de f ainsi que la droite d'équation $y = x$ dans un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 4 cm.

Exercice 3

Une entreprise fabrique à la chaîne des cartouches d'imprimante. Chaque cartouche a une probabilité p d'être défectueuse. En bout de chaîne une machine détecte à coup sûr les cartouches défectueuses et les retire de la chaîne.

1. **Dans cette question**, on suppose que l'on connaît la valeur de la probabilité p et qu'elle est égale à $\dfrac{2}{100}$.

   L'entreprise fabrique en une heure 100 cartouches dont les défauts éventuels sont indépendants les uns des autres. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de cartouches défectueuses détectées en bout de chaîne durant cette période.

   a) Reconnaître la loi de X. On donnera l'ensemble $X(\Omega)$ des valeurs prises par X ainsi que l'expression de $P(X = k)$ pour tout entier k appartenant à $X(\Omega)$.

   b) Calculer l'espérance et la variance de X.

   La machine affiche chaque heure le nombre de cartouches défectueuses mais l'afficheur ne peut plus afficher la valeur 0. En revanche il affiche normalement tous les autres nombres y compris 10, 20, etc. Lorsque X est égale à 0 il affiche au hasard n'importe quel nombre parmi les autres valeurs possibles de X. Soit Y la variable aléatoire égale à la valeur affichée.

   c) On rappelle que l'instruction `grand(1,1,'bin',n,p)` simule une loi binomiale de paramètres (n,p) et que l'instruction `grand(1,1,'uin',1,n)` simule une loi uniforme sur $[\![1,n]\!]$. Recopier et compléter le programme suivant afin qu'il simule l'expérience ci-dessus et qu'il affiche les valeurs respectives de X et de Y.

Tournez la page S.V.P.

```
X=grand(1,1,...)
if X==0 then Y=...
        else Y=...
end
disp(X), disp(Y)
```

2. **Dans cette question**, la valeur de p est inconnue et on cherche à l'estimer. Pour cela on fait tester par la machine n cartouches ($n \geq 1$). Pour tout i compris entre 1 et n, on note X_i la variable aléatoire de Bernoulli égale à 1 si la i-ème cartouche est défectueuse et égale à 0 sinon. On suppose que les variables aléatoires X_i sont indépendantes.
   On note $M_n = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n} X_i$.

   a) Rappeler, pour i compris entre 1 et n, l'espérance et la variance de X_i.

   b) Calculer $E(M_n)$. En déduire que M_n est un estimateur sans biais de p.

   c) Calculer $V(M_n)$. Montrer que le risque quadratique de l'estimateur M_n est égal à $\dfrac{p(1-p)}{n}$.

   d) Soit $\varepsilon > 0$. On admet que $p(1-p) \leq \dfrac{1}{4}$.
   Montrer, en appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev que : $P(|M_n - p| \geq \varepsilon) \leq \dfrac{1}{4n\varepsilon^2}$

   e) Soit $\alpha \in]0;1[$. Montrer que si $\varepsilon = \dfrac{1}{\sqrt{4n\alpha}}$ alors $[M_n - \varepsilon; M_n + \varepsilon]$ est un intervalle de confiance pour p au niveau de confiance $1-\alpha$.

Exercice 4

Pour tout entier $n \geq 1$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 \frac{t^n}{1+t}dt$.

1. a) Vérifier que pour tout réel t appartenant à $[0;1]$ on a : $\dfrac{t}{1+t} = 1 - \dfrac{1}{1+t}$.

   b) En déduire que $I_1 = 1 - \ln(2)$.

   c) Montrer que pour tout entier $n \geq 1$ on a : $I_{n+1} + I_n = \dfrac{1}{n+1}$.

   d) En déduire la valeur de I_2 puis celle de I_3.

Soit k un réel strictement positif. On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(t) = k\frac{t}{1+t} \quad \text{si } t \in [0;1] \text{ et } f(t) = 0 \text{ sinon}$$

2. En utilisant l'un des calculs de la question 1 déterminer la valeur qu'il faut donner à k pour que f puisse être une densité de probabilité. Vérifier que pour cette valeur de k la fonction f est bien une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice on suppose que k est la valeur trouvée à la question 2 et que X est une variable aléatoire ayant f pour densité. On note F sa fonction de répartition.

3. a) Calculer $F(x)$ lorsque $x < 0$ et lorsque $x > 1$.

   b) Montrer que pour tout réel $x \in [0;1]$ on a : $F(x) = k(x - \ln(1+x))$.

4. a) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une espérance et que

$$E(X) = \frac{\ln(2) - \frac{1}{2}}{1 - \ln(2)}$$

   b) En utilisant l'un des calculs de la question 1 justifier que X admet une variance et calculer $V(X)$. On ne demande pas de simplifier l'expression de $V(X)$.

IMPRIMERIE NATIONALE – 20 1076 – D'après documents fournis