RAPPORT DE CORRECTION

DE MATHÉMATIQUES Option T

Conception ESCP Europe

SOMMAIRE

Le sujet

BCE
BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Lundi 6 mai 2019, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Aucun document n'est autorisé. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.
On rappelle que :

- *la probabilité d'un événement A est notée $P(A)$ et si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(A)$ la probabilité conditionnelle de A sachant C ;*
- *l'univers des résultats observables est noté Ω et si Z est une variable aléatoire, on note $Z(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par Z.*

EXERCICE 1

On considère les deux suites réelles $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$ définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1 \text{ et pour tout } n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_n + v_n) \\ v_{n+1} = \dfrac{1}{2}(u_{n+1} + v_n) \end{cases}.$$

1. Vérifier que $u_1 = \dfrac{1}{2}$ et $v_1 = \dfrac{3}{4}$; calculer u_2 et v_2.
2. Compléter le script *Scilab* suivant qui permet de déterminer u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
u=.........
v=.........
for k=1:n
    u=.........
    v=.........
end
disp(u)
disp(v)
```

3. Pour tout $n \in \mathbf{N}$, on pose : $w_n = v_n - u_n$.

a) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{2} w_n$.

b) En déduire que la suite $(w_n)_{n\in\mathbf{N}}$ est une suite géométrique de raison $\frac{1}{4}$.

c) (i) Montrer que l'on a :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*, \ \sum_{k=0}^{n-1} w_k = \frac{4}{3}\left(1 - \left(\frac{1}{4}\right)^n\right).$$

(ii) En déduire à l'aide de la question 3.a) l'expression de u_n en fonction de n, pour tout $n \in \mathbf{N}^*$.

(iii) Vérifier que l'expression précédente reste valide pour $n = 0$.

d) Justifier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbf{N}}$ et donner sa limite.

e) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n et donner la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

4.a) Justifier que l'unique réel α pour lequel la série de terme général $t_n = \frac{9}{8}(\alpha - u_n)$, avec $n \in \mathbf{N}$, est convergente est $\alpha = \frac{2}{3}$.

Dans les questions suivantes, on choisit $\alpha = \frac{2}{3}$.

b) Vérifier que pour tout $n \in \mathbf{N}$, on a $t_n > 0$ et établir l'égalité : $\sum_{n=0}^{+\infty} t_n = 1$.

5. Soit X une variable aléatoire discrète à valeurs dans $\mathbf{N}$, telle que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $P([X = n]) = t_n$.

a) On pose : $Y = X + 1$. Reconnaître la loi de la variable aléatoire Y.

b) En déduire l'espérance et la variance de la variable aléatoire X.

EXERCICE 2

Dans tout l'exercice, on note M et I les deux matrices suivantes :

$$M = \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1.a) Calculer M^2 et montrer que $M^4 = I$.

b) En déduire que M est inversible et donner l'expression de M^{-1}, sans calcul, en fonction de M.

c) Compléter le script *Scilab* suivant permettant de saisir M, de calculer $N = M^{-1}$ et d'afficher les deux matrices M et M^{-1}.

```
M=[......;......;......]
N=.........
disp(M,'la matrice M est :')
disp(N,'la matrice inverse de M est :')
```

2.a) Montrer que la matrice $M - I$ est inversible.

b) Développer le produit matriciel $(M - I)(M^3 + M^2 + M + I)$, puis utiliser le résultat de la question 2.a) pour déterminer la matrice $M^3 + M^2 + M + I$.

c) Retrouver le résultat de la question 2.b) en calculant directement la matrice M^3.

3.a) Soit $x \in \mathbf{R}$. Développer le produit $(x+1)(x^2+1)$ et à l'aide de la question 2.b), en déduire que M possède au plus une valeur propre.

b) On pose : $U = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer $M\,U$ et justifier que M possède une unique valeur propre dont on précisera la valeur.

4.a) On suppose l'existence de réels x, y, z, x', y' et z' vérifiant la relation : $xM^2 + yM + zI = x'M^2 + y'M + z'I$.
Établir les égalités : $x = x'$, $y = y'$ et $z = z'$.

b) *On rappelle* que par convention, pour toute matrice carrée S, on a $S^0 = I$.
À l'aide d'un raisonnement par récurrence, déduire de la question précédente que pour tout $n \in \mathbf{N}$, il existe un unique triplet de réels (a_n, b_n, c_n) tels que : $M^n = a_n M^2 + b_n M + c_n I$.
On donnera la valeur du triplet (a_0, b_0, c_0) et on vérifiera les relations suivantes :

$$\forall n \in \mathbf{N}, \quad \begin{cases} a_{n+1} = b_n - a_n \\ b_{n+1} = c_n - a_n \\ c_{n+1} = -a_n \end{cases} .$$

5. Utiliser les relations trouvées à la question 4.b) pour compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche a_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrez la valeur de n :')
a=0
b=0
c=1
for k=1:n
    u=a
    a=.........
    b=.........
    c=.........
disp(a)
end
```

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, on note n un entier supérieur ou égal à 1 et $\overline{A}$ l'événement contraire d'un événement A.

On suppose que dans une certaine région, pendant une période donnée, seuls deux états météo sont possibles : le beau temps et le mauvais temps.
L'étude des bulletins météo du passé laisse penser que le temps qu'il fait un certain jour de cette période dépend du temps qu'il a fait la veille de la façon suivante :

- s'il fait beau un jour donné, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est égal à $\frac{4}{5}$;
- s'il fait mauvais un jour donné, la probabilité qu'il fasse mauvais le lendemain est égal à $\frac{2}{5}$.

On s'intéresse à une période débutant le jour 1, jour au cours duquel il a fait beau .
Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note :

- B_n l'événement : « il fait beau le jour n » ;
- $\overline{B}_n$ l'événement « il fait mauvais le jour n » ;
- $u_n = P(B_n)$ et $v_n = P(\overline{B}_n)$.

1.a) Donner la valeur de u_1.

b) Déterminer les probabilités conditionnelles $P_{B_n}(B_{n+1})$ et $P_{\overline{B}_n}(B_{n+1})$.

2.a) À l'aide de la formule des probabilités totales, établir la relation :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ u_{n+1} = \frac{4}{5}\,u_n + \frac{3}{5}\,v_n\,.$$

b) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, u_{n+1} en fonction de u_n.

c) Déterminer pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'expression de u_n en fonction de n.

d) Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et interpréter ce résultat.

3.a) Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on a : $v_{n+1} = \dfrac{1}{5}\,u_n + \dfrac{2}{5}\,v_n$.

b) Pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, on note X_n la matrice à une ligne et deux colonnes suivante : $X_n = (u_n \quad v_n)$.

Déterminer la matrice carrée K, indépendante de n, qui vérifie la relation suivante :

$$\forall n \in \mathbf{N}^*,\ X_{n+1} = X_n\,K\,.$$

c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, donner pour tout $n \in \mathbf{N}^*$, l'expression de X_{n+1} en fonction de X_1 et K.

d) En déduire l'expression (sous forme de tableau) de la matrice K^n en fonction de n.

4. On code un jour de beau temps par 1 et un jour de mauvais temps par 2.

On admet que la commande `x=grand(99,'markov',K,1)` renvoie un vecteur contenant autant de "1" que de jours de beau temps et autant de "2" que de jours de mauvais temps, et ceci, entre le deuxième jour et le centième jour.

Compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il renvoie le nombre de jours de beau temps lors des 100 premiers jours de la période considérée, y compris le premier.

```
K=[······;······]
x=grand(99,'markov',K,1)-1
n=·········
disp(n,'le nombre de jours de beau temps est :')
```

5.a) Soit U_n l'événement « il fait beau pendant les n premiers jours de la période considérée ». Calculer $P(U_n)$.

b) Soit V_n l'événement « il fait beau au moins deux fois lors des n premiers jours de la période considérée ».

Calculer $P(V_n)$.

EXERCICE 4

Dans tout l'exercice, on note f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par :

$$\forall t \in \mathbf{R},\ f(t) = \begin{cases} \dfrac{2\,t}{(1+t^2)^2} & \text{si } t \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } t < 0 \end{cases}.$$

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbf{R}_+$ par :

$$\forall t \geqslant 0,\ g(t) = -\frac{1}{1+t^2}\,.$$

a) On note g' la dérivée de la fonction g. Pour tout réel $t \geqslant 0$, calculer $g'(t)$.

b) Pour tout $x \geqslant 0$, on pose : $I(x) = \displaystyle\int_0^x \frac{2\,t}{(1+t^2)^2}\,\mathrm{d}t$. Déduire de la question précédente la valeur de $I(x)$.

c) Calculer $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ et vérifier que f est une densité de probabilité.

On considère désormais une variable aléatoire X définie sur un espace probabilisé, telle que $X(\Omega) = \mathbf{R}_+$ et admettant f comme densité.

2. On note F la fonction de répartition de X. Établir la relation suivante :

$$\forall x \in \mathbf{R},\ F(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{1+x^2} & \text{si } x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si } x < 0 \end{cases}.$$

3. On pose $Y = \dfrac{X^2}{1+X^2}$ et on note G la fonction de répartition de la variable aléatoire Y.

a) Étudier les variations de la fonction Q qui, à tout réel $x \geqslant 0$, associe $Q(x) = \dfrac{x^2}{1+x^2}$, puis déterminer $Y(\Omega)$.

b) Pour tout $y \in [0, 1[$, calculer $G(y)$ et en déduire que Y suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, 1[$.

c) Vérifier que $X = \sqrt{\dfrac{Y}{1-Y}}$, puis compléter à l'aide de la commande `rand()`, le script *Scilab* suivant afin qu'il simule la variable aléatoire X.

```
Y=.........
X=.........
```

4. Pour tout réel $h > 0$, soit T_h la fonction définie sur $\mathbf{R}_+^*$ par :

$$\forall x > 0,\ T_h(x) = \frac{1}{h} \times P_{[X>x]}\big([X \leqslant x+h]\big).$$

a) Soit x un réel strictement positif fixé. Montrer que l'on a : $\lim\limits_{h \to 0} T_h(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$.

b) Pour tout réel $x > 0$, on pose : $T(x) = \dfrac{f(x)}{1-F(x)}$. Déterminer explicitement $T(x)$.

c) Pour tout réel $x > 0$, calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^x T(t)\,\mathrm{d}t$ et exprimer cette intégrale en fonction de $F(x)$.

Le sujet

L'épreuve comprenait comme à l'accoutumée, quatre exercices indépendants dont le contenu couvrait une large partie du programme.

Chacun des quatre exercices proposait de compléter un script Scilab.
L'exercice 1 d'analyse étudiait les propriétés (classiques) de deux suites récurrentes et s'achevait par des questions sur les séries numériques en lien avec les propriétés d'une certaine variable aléatoire discrète dont il fallait reconnaître la loi.
L'exercice 2 d'algèbre matricielle avait pour but de déterminer les valeurs propres d'une matrice M d'ordre 3 donnée ainsi qu'une formule exprimant M n en fonction de I, M et M 2..
Dans l'exercice 3, on étudiait les propriétés d'une suite (un) de probabilités permettant de calculer l'expression de un en fonction de n.
Enfin, l'exercice 4 étudiait la détermination de la fonction de hasard d'une variable aléatoire à densité donnée dont on faisait calculer la fonction de répartition.

Le Barème

Les quatre exercices comptaient respectivement pour 23%, 26%, 28% et 23% des points de barème.
Le poids des questions de Scilab représentait 11,5% des points de barème.
Les questions les plus cotées étaient :

- exercice 1 : 5.b) ;
- exercice 2 : 4.b) et 5 ;
- exercice 3 : 3.d) ;
- exercice 4 : 3.

Remarques de correction

Cette année encore, le jury a constaté un certain nombre d'excellentes copies, toutefois en légère baisse par rapport au concours 2018.
Les questions de Scilab sont dans l'ensemble très souvent abordées et souvent réussies.

Exercice 1
Les questions 1, 2, 3.a), 3.b), 3.c)(i) et 3.c)(ii) sont en général plutôt bien traitées. Par contre, la question 3.c)(iii) est très rarement résolue correctement.
Il est dommage que nombre de candidats qui raisonnent convenablement dans les questions 3.d) et 3.e) justifient leurs résultats par l'argument (faux) suivant : « $-1 \leq 1/4 \leq 1$ » (les inégalités strictes sont ici, fondamentales).
La question 4.a) n'est pratiquement jamais résolue bien que le cours soit à cet égard très explicite.
On voit exceptionnellement un traitement exact des questions 4.b), 5.a) et 5.b).

Exercice 2
La résolution des trois sous-questions de la question 1 est en général bien conduite.
En négligeant les erreurs de calcul dans la question 2 .a), la mise en œuvre du pivot de Gauss est plutôt bien faite, mais pratiquement aucun candidat ne « pense » à utiliser cette question pour répondre à la question 2.b) : beaucoup écrivent « $AB = 0$ et $A \neq 0$ impliquent $B = 0$ », ce qui est évidemment faux pour des matrices !!
Les questions 3.a) et 3.b) relatives aux éléments propres de la matrice restent assez largement confuses pour nombre de candidats qui pour beaucoup, oublient systématiquement de préciser que $U \neq 0$.
La question 4 est très mal traitée ; la grande majorité des candidats ne voit pas la deuxième ligne du système qui leur permettrait de répondre immédiatement à la question !! Dans la récurrence, hormis l'initialisation, rien d'autre n'est convaincant.
Dans le script Scilab de la question 5, beaucoup de candidats écrivent : a = b-a (ce qui est juste), b = c-a et c = a au lieu de b = c-u et c = -u.

Exercice 3
La question 1.a) nécessitait une simple lecture de l'énoncé, ce qui ne fut pas le cas d'un certain nombre de candidats.
Les questions 1.b) et 2 sont plutôt bien résolues même si dans la question 2.a), on oublie de faire référence au système complet d'événements (Bn, Bnc) et que dans la question 2.c), l'interprétation du résultat est soit ignorée, soit erronée.
La résolution des questions 3.a), 3.b) et 3.c) est assez satisfaisante mais la question 3.d) (difficile) n'est jamais entreprise.
La première ligne du code Scilab de la question 4 est très souvent correcte mais la troisième ligne n'a rencontré aucun succès !!
Enfin, il est rarissime de voir une réponse correcte dans la question 5.a) et la question 5.b) (difficile) n'a jamais été résolue.

Exercice 4
Les trois sous-questions de la question 1 sont plutôt satisfaisantes ainsi que la question 2 qui est souvent bien résolue.
A part la dérivée de la question 3.a) qui est souvent correcte, les autres sous-questions de cette question 3 sont très rarement bien conduites, notamment le script Scilab.
Dans la question 4.a), l'expression de Th (x) est souvent trouvée avec la probabilité conditionnelle mais le passage à la limite est rarissime. La question 4.b) est souvent bien résolue mais la question 4.c) n'a pas suscité l'intérêt des candidats, ce qui est dommage car elle ne présentait pas de difficultés insurmontables.

Conseils aux futurs candidats

Pour ce qui concerne la forme, le jury conseille aux futurs candidats de lire attentivement le texte préliminaire qui précède toute épreuve écrite de mathématiques, dans lequel il est précisé notamment, que la lisibilité et la qualité de la rédaction entrent pour une part non négligeable dans l'appréciation des copies : un correcteur ne s'attarde pas à essayer de « décrypter » une copie illisible. Par contre, une copie propre et claire ne peut qu'avantager son auteur. Le jury rappelle également que les abréviations dans les copies doivent être proscrites et il conseille de bien numéroter les questions et d'encadrer les résultats.
De plus, les raisonnements doivent être clairs et précis, les affirmations étant étayées par une argumentation solide. Par exemple, le recours trop fréquent à des phrases du type « il est clair que… » doit être évité au profit d'une justification correcte fondée sur un apprentissage rigoureux et une très bonne maîtrise du cours.
Le jury recommande aux futurs candidats de prendre le temps de lire l'ensemble du sujet, non seulement pour s'en imprégner, mais aussi pour pointer les questions qui paraissent faciles à résoudre, lesquelles ne se situent pas nécessairement dans la première partie du sujet.
La recherche d'une solution à une question ne doit pas dépasser quatre à cinq minutes. Au-delà de ce délai, en cas d'échec, le candidat doit admettre le résultat de cette question (si la réponse figure dans l'énoncé), passer à la question suivante sans éprouver un sentiment de déstabilisation ou de découragement. Autrement dit, le jury recommande aux futurs candidats de faire preuve d'une grande ténacité.

Statistiques

Sur les 1079 candidats ayant composé dans cette épreuve (1432 candidats en 2018), la note moyenne est de 9,26 (quasiment identique à celle de 2018) avec un écart-type de 5,09 suffisamment élevé pour classer les candidats de manière satisfaisante. Le nombre de candidats ayant obtenu une note supérieure ou égale à 16 est de 120, soit 11,1% des candidats présents.

On compte 12 candidats qui se voient attribuer la note maximale de 20.

La note médiane est de 9,3 et les premier et troisième quartiles sont égaux à 4,9 et 13,3 respectivement.

La note maximale de 20 était attribuée aux candidats ayant obtenu au moins 70% des points du barème, soit 3 exercices sur 4.