BSB 2019

Exercice 1 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2(3^n - 2^n) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 2 \times 3^n - 2^{n+1} + 3^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. a) L'instruction manquante est `a=2*a+3∧(i-1)`.
   En effet, pour calculer le terme a_i, il faut sommer le double du terme précédent $2a_{i-1}$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^{i-1}.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

   Ainsi j'ai bien montré que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_{n+1} = AX_n$.

   c) Voici le programme complété.

```
1.  n=input("n?")
2.  A=[2,0,1;0,3,1;0,0,3]
3.  X=[2;0;1]
4.  for i=1:n
5.      X=A*X
6.  end
7.  disp(X(1))
```

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

e) D'après les questions précédentes,

$$X_n = A^n X_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré qu'en particulier, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. a) Je calcule le produit $P \times Q$:

$$PQ = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Comme $P \times Q = I_3$, j'en déduis que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule le produit $P \times M$ avant de multiplier le résultat par P^{-1} :

$$PM = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

et

$$PMP^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMP^{-1} = A$.

c) Avant de passer à la récurrence, il me faut montrer que $M = P^{-1}AP$.
Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente : comme $PMP^{-1} = A$, alors $P^{-1} \times PMP^{-1} \times P = P^{-1}AP$, *i.e.* $M = P^{-1}AP$, puisque $P^{-1}P = I_3$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^n \times AP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme elle est héréditaire et vraie pour $n = 0$, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1}A^nP.$$

Comme je connais les matrices P^{-1}, A^n et P, il ne me reste plus qu'à calculer le produit :

$$A^nP = \begin{pmatrix} -3^n + 2^n & 0 & -2^n + 3^n - 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n - 3^n & 0 & 3^n - 2 \times 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix}$$

et

$$P^{-1}A^nP = \begin{pmatrix} -2^n + 3^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n - 3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n + 3^n & 0 & -3^n + 2 \times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 3^n - 2^n & 0 & 2(2^n - 3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n - 2^n & 0 & 2^{n+1} - 3^n \end{pmatrix}.$$

4. a) J'ai montré à la question **2.e)** que $b_k = k \times 3^{k-1}$, donc $b_{k+1} = (k+1) \times 3^k = k \times 3^k + 3^k$. Alors

$$\begin{aligned} b_{k+1} - b_k - 3^k &= k \times 3^k + 3^k - k \times 3^{k-1} - 3^k = k \times \left(3^k - 3^{k-1}\right) = k \times \left(3 \times 3^{k-1} - 3^{k-1}\right) \\ &= k \times 3^{k-1} \times (3-1) = b_k \times 2 = 2b_k. \end{aligned}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

b) Je reconnais la somme des $n+1$ premières puissances de 3. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1 - 3^{n+1}}{1-3} = \frac{1 - 3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1} - 1}{2}.$$

c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \left(b_{k+1} - b_k\right) = \sum_{k=0}^{n} b_{k+1} - \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n+1} b_k - \sum_{k=0}^{n} b_k = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, tous les termes sont présents dans les deux sommes sauf b_{n+1} qui n'est que dans la première et b_0 que dans la seconde.
Et comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

d) En assemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens bien l'égalité désirée :

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_{k=0}^{n} \left(b_{k+1} - b_k\right) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1} - 1}{2}\right) = \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1 - 3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}. \end{aligned}$$

Exercice 2 –

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

J'en déduis que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y=0$.

2. a) Je pars de l'expression $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour retrouver l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

J'ai bien montré que $\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

J'en déduis alors que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y=1$.

3. a) La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1+e^x$.
Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x\times\left(1+e^x\right)-e^x\times e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

J'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur, une exponentielle. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f'(x)>0\quad$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

D'où le tableau de variation suivant :

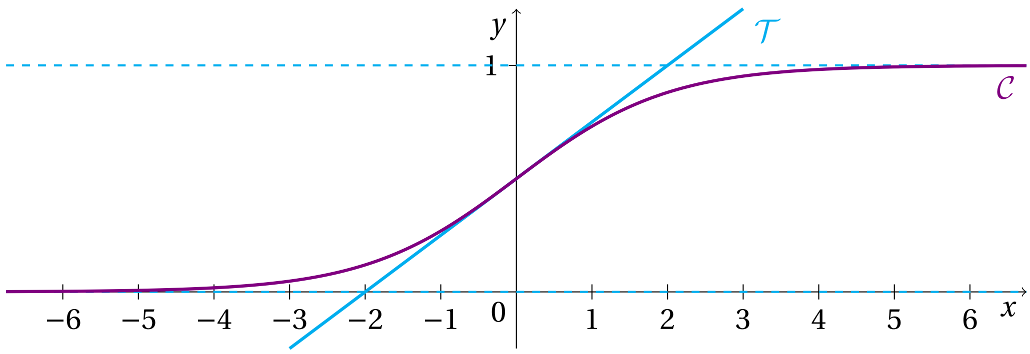
x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0 ↗	$\frac{1}{2}$ ↗	1

c) L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$. Ici $a=0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0).$$

Or
$$f(0)=\frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0)=\frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2}=\frac{1}{\left(1+1\right)^2}=\frac{1}{4}.$$
Finalement l'équation de $\mathcal{T}$ est donnée par
$$y=\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}.$$

4. La convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.
   Ici l'énoncé me donne $f''(x)=\dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x>0 \quad$ et $\quad (1+e^x)>0$,
   j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$.
   Or $\quad 1-e^x \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 1 \geqslant e^x \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \geqslant x,\quad$ donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $\left]-\infty,0\right[$ puis concave sur l'intervalle $\left]0,+\infty\right[$.
   Le point de coordonnées $\left(0,\dfrac{1}{2}\right)$ *est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.*
5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



6. a) La fonction h est de la forme $h=\ln(u)$ avec $u(x)=1+e^x$. Puisque $u'(x)=e^x$, alors
$$h'(x)=\frac{u'(x)}{u(x)}=\frac{e^x}{1+e^x}=f(x).$$
   J'ai montré que $\forall x\in\mathbb{R}, \quad h'(x)=f(x)$.

   b) Afin de montrer la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$,
   je fixe $m\in\left]-\infty,0\right[$ et calcule l'intégrale $\displaystyle\int_{m}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ avant de faire tendre m vers $-\infty$.
   Or je sais désormais que $h'=f$, donc une primitive de f est donnée par h. Ainsi
$$\int_m^0 f(x)\,\mathrm{d}x=\Big[h(x)\Big]_m^0=h(0)-h(m)=\ln\left(1+e^0\right)-\ln\left(1+e^m\right)=\ln(2)-\ln\left(1+e^m\right).$$
   Puis
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{m\to-\infty} 1+e^m=1\\ \lim\limits_{X\to1}\ln(X)=0\end{array}\right\}\ \text{Par composition,}\quad \lim_{m\to-\infty}\ln\left(1+e^m\right)=0.$$
   Donc l'intégrale impropre $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut
$$\int_{-\infty}^{0} f(x)\,\mathrm{d}x=\ln(2)-0=\ln(2).$$

Exercice 3 –

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et la boule tirée est rouge avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \dfrac{1}{2}$.
   Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et la boule tirée est rouge avec probabilité 1. Autrement dit $P_{\overline{F}}(R_1) = 1$.
   Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par
   $$P(R_1) = P(F \cap R_1) + P(\overline{F} \cap R_1) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$
2. a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
   D'après la formule des probabilités composées,
   $$P_F\big(R_1 \cap R_2\big) = P_F(R_1) \times P_{F\cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$
   De même,
   $$P_{\overline{F}}\big(R_1 \cap R_2\big) = P_{\overline{F}}(R_1) \times P_{\overline{F}\cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$
   Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par
   $$P(R_1 \cap R_2) = P(F) \times P_F\big(R_1 \cap R_2\big) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}\big(R_1 \cap R_2\big) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$
   b) Je cherche ici $P_{R_1\cap R_2}(\overline{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,
   $$P_{R_1\cap R_2}(\overline{F}) = \frac{P\big(\overline{F} \cap R_1 \cap R_2\big)}{P\big(R_1 \cap R_2\big)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$
   Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est $\dfrac{6}{7}$.
3. ***Dans cette question, une erreur s'est glissée dans l'énoncé.***
   a) Si une boule blanche est tirée en premier, alors je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 1$.
   Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$ et il faut donc faire au moins un autre tirage.
   Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$. Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne les tirages ont lieu.
   Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$. Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne $\mathcal{U}_1$ puisque seule l'urne $\mathcal{U}_1$ contient plus de 2 boules rouges.
   Ainsi j'ai montré que le support de Y, ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y, est donné par $Y(\Omega) = [\![1,3]\!]$.
   b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc que la pièce a amené FACE.
   Ainsi j'ai bien montré que
   $$[Y = 1] = F \cap B_1.$$
   Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,
   $$P(Y = 1) = P\big(F \cap B_1\big) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je peux montrer que

$$[Y=2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P(Y=2) = P\big(F \cap R_1 \cap B_2\big) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F\cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

d) Par complémentarité, comme $\big\{[Y=1],[Y=2],[Y=3]\big\}$ forme un système complet d'événements, j'obtiens que

$$P(Y=3) = 1 - P(Y=1) - P(Y=2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

Je remarque qu'il s'agit là de la somme des deux probabilités données dans l'énoncé.

e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1\times P(Y=1)+2\times P(Y=2)+3\times P(Y=3) = 1\times\frac{1}{4}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{7}{12} = \frac{1}{4}+\frac{1}{3}+\frac{7}{4} = 2+\frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 4 –

1. a) Soit $n \geqslant 1$. Je cherche à calculer $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n t^{n-1}\,\mathrm{d}t$. Je commence par chercher une primitive à $f_n(t) = n t^{n-1}$. Une primitive de f_n est donnée par

$$F_n(t) = n \times \frac{t^{n-1+1}}{n-1+1} = n \times \frac{t^n}{n} = t^n.$$

Finalement
$$\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \left[t^n\right]_0^1 = 1^n - 0^n = 1 - 0 = 1.$$

b) La fonction f_n est définie en trois morceaux.

- Pour $t < 0$ et $t > 1$, $f_n(t) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \in [0,1]$, $f_n(t) = n t^{n-1} \geqslant 0$, car $n \geqslant 1$ et $t \geqslant 0$. Donc f_n est positive sur $\mathbb{R}$.
- La fonction f_n est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, elle est continue sur $[0,1[$ car polynomiale et elle est continue sur $[1,+\infty[$ car constante.
  Donc f_n admet au plus deux points de discontinuité.
- Il reste à montrer que l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.
  Or $\int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}= \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0 puisque la fonction sous l'intégrale est nulle, de même que $\int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}= \int_1^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 0.
  Et d'après la question précédente, $\int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t = 1$. Alors par la relation de Chasles, l'intégrale généralisée $\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1.$$

Selon les trois points précédents, f_n décrit bien une densité de probabilité.

2. a) La fonction de répartition F_n de X_n est donnée par $F_n(x) = P(X_n \leqslant x) = \int_{-\infty}^{x} f_n(t)\,\mathrm{d}t$.
Je raisonne par disjonction de cas :

- Si $x < 0$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Si $x > 1$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^1 f_n(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^x 0\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1$.

b) Je termine ma disjonction de cas entamée à la question précédente :

- Si $x \in [0,1]$, alors $F_n(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x n t^{n-1}\,\mathrm{d}t = \left[t^n\right]_0^x = x^n - 0^n = x^n$.

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$F_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^n & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

3. La variable aléatoire X_n admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge. Or les deux intégrales $\int_{-\infty}^{0} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ et $\int_{1}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0. Ainsi la variable aléatoire X_n admet une espérance et

$$E(X_n) = \int_{-\infty}^{+\infty} t f_n(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \int_0^1 t \times \left(n t^{n-1}\right)\mathrm{d}t + 0 = \int_0^1 n t^n\,\mathrm{d}t.$$

Je cherche à calculer $\int_0^1 n t^n\,\mathrm{d}t$. Je commence par chercher une primitive à $g_n(t) = n t^n$.
Une primitive de g_n est donnée par

$$G_n(t) = n \times \frac{t^{n+1}}{n+1} = \frac{n}{n+1} \times t^{n+1}.$$

Finalement

$$\int_0^1 t f_n(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 n t^n\,\mathrm{d}t = \left[\frac{n}{n+1} \times t^{n+1}\right]_0^1 = \frac{n}{n+1} \times \left(1^n - 0^n\right) = \frac{n}{n+1}.$$

Ainsi j'ai bien montré que $E(X_n) = \dfrac{n}{n+1}$.

4. a) La variable aléatoire Z est égale à la valeur maximale entre U_1 et U_2.
Ainsi la valeur maximale est inférieure ou égale à x si et seulement si les deux valeurs sont elles mêmes inférieures ou égales à x, *i.e.* pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$[Z \leqslant x] = \left[\max(U_1, U_2) \leqslant x\right] = [U_1 \leqslant x] \cap [U_2 \leqslant x].$$

En particulier,

$$P\big([Z \leqslant x]\big) = P\big([U_1 \leqslant x] \cap [U_2 \leqslant x]\big).$$

Puis comme les variables aléatoires X_1 et X_2 sont identiques et indépendantes, alors pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = P\big([Z \leqslant x]\big) = P\big([U_1 \leqslant x]\big) \times P\big([U_2 \leqslant x]\big) = P\big([U_1 \leqslant x]\big)^2 = \big(F(x)\big)^2.$$

Finalement, grâce à l'expression de la fonction F, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$H(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1 & \text{si } x > 1. \end{cases}$$

Je reconnais alors la fonction de répartition F_2 de la variable aléatoire X_2.
Et comme la fonction de répartition caractérise la loi, alors Z et X_2 suivent la même loi.

b) Je calcule les trois probabilités demandées à l'aide de la fonction de répartition :

$$P\left(Z \geqslant \frac{1}{3}\right) = 1 - P\left(Z \leqslant \frac{1}{3}\right) = 1 - H\left(\frac{1}{3}\right) = 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = 1 - \frac{1}{9} = \frac{8}{9}.$$

De même,

$$P\left(\frac{1}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2}\right) = H\left(\frac{1}{2}\right) - H\left(\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{9} = \frac{9-4}{36} = \frac{5}{36}.$$

Enfin d'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{[Z \geqslant \frac{1}{3}]}\left(Z \leqslant \frac{1}{2}\right) = \frac{P\Big(\left[Z \geqslant \frac{1}{3}\right] \cap \left[Z \leqslant \frac{1}{2}\right]\Big)}{P\left(Z \geqslant \frac{1}{3}\right)} = \frac{P\left(\frac{1}{3} \leqslant Z \leqslant \frac{1}{2}\right)}{P\left(Z \geqslant \frac{1}{3}\right)} = \frac{5}{36} \times \frac{9}{8} = \frac{5}{4 \times 8} = \frac{5}{32}.$$

c) Voici le programme complété :

```
U1=grand(1,1,'unf'0,1).
U2=grand(1,1,'unf'0,1).
if U1>=U2 then
  Z=U1
else
  Z=U2
end
disp(Z)
```

5. a) Par définition de la fonction de répartition, pour tout réel $x \in \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} G_n(x) &= P\big(Y_n \leqslant x\big) = P\big(-\ln(X_n) \leqslant x\big) = P\big(\ln(X_n) \geqslant -x\big) = P\big(X_n \geqslant e^{-x}\big) \\ &= 1 - P\big(X_n \leqslant e^{-x}\big) = 1 - F_n\big(e^{-x}\big). \end{aligned}$$

b) Si $x < 0$, alors $-x > 0$ et par croissance de la fonction exponentielle, $e^{-x} > e^{-0} = 1$. Alors grâce au résultat de la question **2.b).**,

- Si $x < 0$, alors $e^{-x} > 1$ et $G_n(x) = 1 - F_n\big(e^{-x}\big) = 1 - 1 = 0$.

c) Je termine ma disjonction de cas entamée à la question précédente :

- Si $x > 0$, alors $0 < e^{-x} \leqslant 1$ par la question précédente et que $e^X > 0$ pour tout $X \in \mathbb{R}$. Alors
$$G_n(x) = 1 - F_n\big(e^{-x}\big) = 1 - \big(e^{-x}\big)^n = 1 - e^{-nx}.$$

Ainsi j'ai montré que pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$G_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ 1 - e^{-nx} & \text{si } x \geqslant 0. \end{cases}$$

Je reconnais en G_n la fonction de répartition d'une loi exponentielle de paramètre n. Donc Y_n suit une loi exponentielle de paramètre n, *i.e.* $Y_n \hookrightarrow \mathcal{E}(n)$.

d) Comme Y_n suit une loi exponentielle, alors

$$E\big(Y_n\big) = \frac{1}{n} \quad \text{et} \quad V\big(Y_n\big) = \frac{1}{n^2}.$$