CONCOURS ECRICOME PREPA

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. Les vecteurs V_1, V_2, V_3 sont non nuls et vérifient :

$$MV_1 = V_1, \quad MV_2 = 6V_2, \quad MV_3 = -2V_3$$

Ce sont bien des vecteurs propres, V_1 est associé à la valeur propre 1, V_2 est associé à la valeur propre 6, V_3 est associé à la valeur propre -2.

2. $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ et admet trois valeurs propres distinctes, donc M est diagonalisable. En posant $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, la matrice P est inversible et on a $M = PDP^{-1}$, autrement dit $MP = PD$.

3. (a) $P^2 = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$, $P^3 = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -2 \end{pmatrix}$. On obtient $P^3 + P^2 + I_3 = 0$, donc $X^3 + X^2 + 1$ est bien un polynôme annulateur de P.

   (b) On en déduit que, $-P^3 - P^2 = I_3 \Longrightarrow P(-P^2 - P) = I_3$, donc P est inversible et :

$$P^{-1} = -P^2 - P = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

4. (a) $Y^2 = (P^{-1}XP)(P^{-1}XP) = P^{-1}X(PP^{-1})XP = P^{-1}X^2P$.

   (b)

$$\begin{aligned} X^2 - 4X + I = M &\Longleftrightarrow P^{-1}(X^2 - 4X + I)P = P^{-1}MP \\ &\Longleftrightarrow (P^{-1}X^2P) - 4(P^{-1}XP) + (P^{-1}P) = (P^{-1}MP) \\ &\Longleftrightarrow Y^2 - 4Y + I_3 = D \end{aligned}$$

5. (a) Soit $Y = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}$ une matrice diagonale. Alors $Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 \end{pmatrix}$. On a :

$$\begin{aligned} Y^2 - 4Y + I = D &\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} a^2 - 4a + 1 & 0 & 0 \\ 0 & b^2 - 4b + 1 & 0 \\ 0 & 0 & c^2 - 4c + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \\ &\Longleftrightarrow \begin{cases} a^2 - 4a + 1 & = 1 \\ b^2 - 4b + 1 & = 6 \\ c^2 - 4c + 1 & = -2 \end{cases} \end{aligned}$$

$$\iff \begin{cases} a^2 - 4a &= 0 \\ b^2 - 4b - 5 &= 0 \\ c^2 - 4c + 3 &= 0 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} a = 0 \text{ ou } a = 4 & (\Delta_a = 16) \\ b = -1 \text{ ou } b = 5 & (\Delta_b = 36) \\ c = 1 \text{ ou } c = 3 & (\Delta_c = 4) \end{cases}$$

Si on impose que $a \leqslant 2$, $b \leqslant 2$, $c \leqslant 2$, alors :

$$Y^2 - 4Y + I = D \iff \begin{cases} a = 0 \\ b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff Y = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

(b) On sait que $Y = P^{-1}XP$, donc $X = PYP^{-1}$.

On obtient : $PY = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ ou $YP^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, puis $X = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Partie I.

1. g est dérivable sur $]0, +\infty[$ et $\forall x > 0, g'(x) = 2x - \dfrac{4}{x} = \dfrac{2(x^2-2)}{x}$.
   On en déduit ci-contre le tableau de variations de g sur $]0, +\infty[$.

x	0		$\sqrt{2}$		$+\infty$
$g'(x)$	‖	$-$	0	$+$	
$g(x)$	‖	$\searrow$	$g(2)$	$\nearrow$	

   La fonction g atteint donc son minimum sur $]0, +\infty[$ en $\sqrt{2}$, qui vaut :

$$g(\sqrt{2}) = 2 - 4\ln(\sqrt{2}) = 2 - 4\ln(2^{1/2}) = 2 - 4\frac{1}{2}\ln(2) = 2 - 2\ln(2) = 2(1 - \ln(2))$$

2. Comme $2 < e$, on a $\ln(2) < \ln(e) = 1$, donc $1 - \ln(2) > 0$. Ainsi, le minimum de g est strictement positif.
   On en déduit donc que $\boxed{\forall x > 0, g(x) > 0}$.

3. On sait déjà que $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x}{4} = 0$. De plus, par quotient, $\lim\limits_{x \to 0^+} \dfrac{1 + \ln(x)}{x} = -\infty$.
   Par somme, $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = -\infty}$. La courbe admet donc une asymptote verticale d'équation $x = 0$.

4. On sait que par croissances comparées, $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$, donc par somme, on a $\boxed{\lim\limits_{x \to 0} f(x) = +\infty}$.

5.
$$f(x) - \left(\frac{x}{4}\right) = \frac{1 + \ln(x)}{x} = \frac{1}{x} + \frac{\ln(x)}{x} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0 \quad \text{(croissances comparées)}$$
   Ainsi, la droite (D) est bien asymptote à la courbe $(\mathcal{C})$ au voisinage de $+\infty$.

6. On étudie le signe de $f(x) - \left(\dfrac{x}{4}\right) = \dfrac{1 + \ln(x)}{x}$. On a :

$$\frac{1 + \ln(x)}{x} \geqslant 0 \iff 1 + \ln(x) \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant -1 \iff x \geqslant e^{-1}$$

Sur $]0, e^{-1}[$, $(\mathcal{C})$ est en-dessous de (D). Sur $[e^{-1}, +\infty[$, $(\mathcal{C})$ est au-dessus de (D). Les deux courbes s'intersectent au point d'abscisse $\dfrac{1}{e}$, et d'ordonnée $\frac{1}{4e}$.

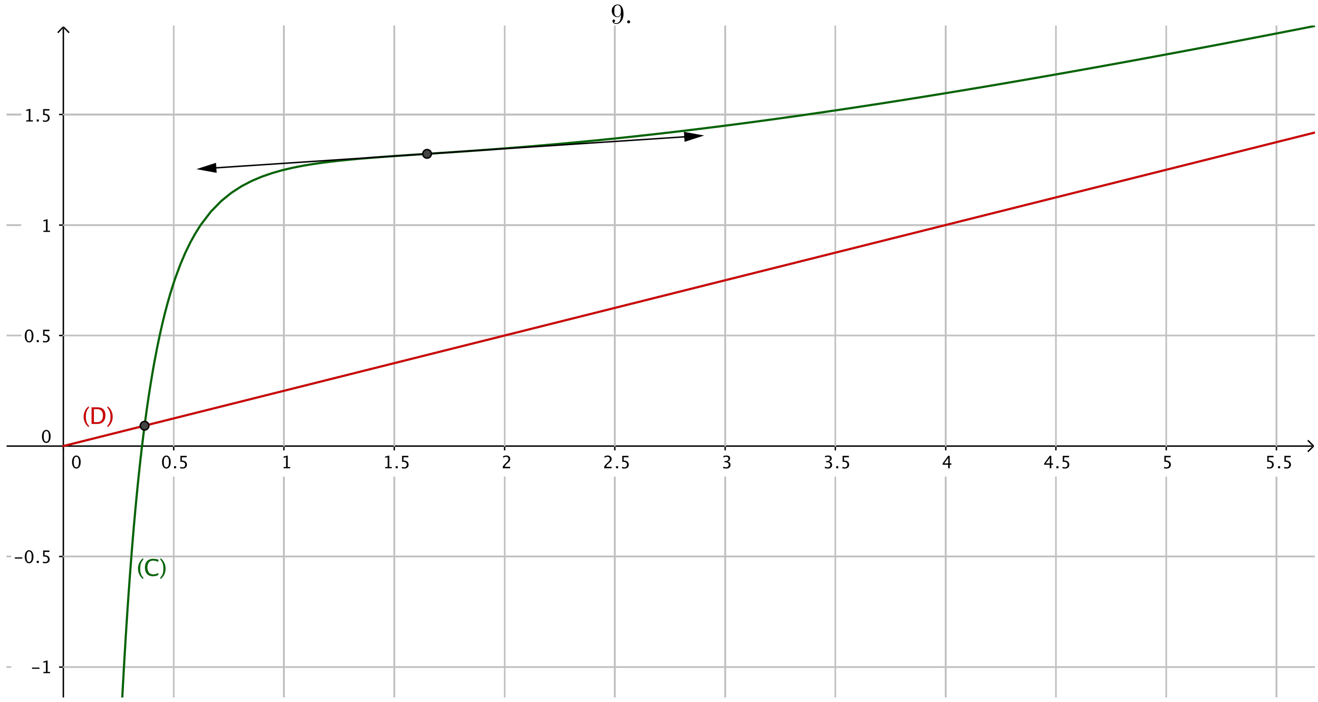
7. La fonction f est dérivable et on a :
$$\forall x > 0, f'(x) = \frac{1}{4} + \frac{\frac{1}{x}x - (1 + \ln(x))1}{x^2} = \frac{1}{4} - \frac{\ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 - 4\ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2} > 0$$
La fonction f est donc strictement croissante sur $]0, +\infty[$. On en déduit le tableau de variations de f.

x	0 $\qquad\qquad$ $+\infty$
$f'(x)$	$\|$ $\qquad$ $+$
$f(x)$	$\|$ $-\infty \nearrow +\infty$

8. (a) La fonction f' est encore dérivable sur $]0, +\infty[$, puisque $\forall x > 0, f'(x) = \dfrac{1}{4} - \dfrac{\ln(x)}{x^2}$, et on a :
$$\forall x > 0, f''(x) = -\frac{\frac{1}{x}x^2 - \ln(x)2x}{x^4} = \frac{2x\ln(x) - x}{x^4} = \frac{2\ln(x) - 1}{x^3}$$

(b)
$$f''(x) \geqslant 0 \iff \frac{2\ln(x) - 1}{x^3} \geqslant 0 \iff 2\ln(x) \geqslant 1 \iff \ln(x) \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant e^{1/2} = \sqrt{e}$$
Sur $]0, \sqrt{e}]$, la fonction f est concave. Sur $[\sqrt{e}, +\infty[$, la fonction f est convexe. La courbe admet donc un point d'inflexion au point d'abscisse $\sqrt{e}$.

9.



Partie II.

1. La fonction u est dérivable sur $]0,+\infty[$ et $\forall x>0, u'(x)=2\frac{1}{x}\ln(x)$.
2.

$$\begin{aligned}\int_1^e f(x)dx &= \int_1^e \left(\frac{x}{4}+\frac{1}{x}+\frac{\ln(x)}{x}\right)dx\\ &= \left[\frac{x^2}{8}+\ln(x)+\frac{1}{2}(\ln x)^2\right]_1^e\\ \frac{e^2}{8}+1+\frac{1^2}{2}-\frac{1}{8}-0-0 &= \frac{e^2+11}{8}\end{aligned}$$

3.
   - La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$ sauf éventuellement en 1 et e (f est bien continue sur $[1,e]$). De plus, la fonction h admet bien des limites finies à droite et à gauche en 1 et en e, donc h est bien continue par morceaux sur $\mathbb{R}$.
   - $\forall x\in[1,e], f(x)\geqslant 0$, donc $\forall x\in\mathbb{R}, h(x)\geqslant 0$.
   - $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)dx=\frac{8}{e^2+11}\int_1^e f(x)dx=1.$

   La fonction h est donc bien une densité de probabilité.
4. (a) On pose :

$$\forall x\in[1,e],\ \left|\begin{array}{l}u(x)=\ln(x)\\ v'(x)=1\end{array}\right.,\ \left|\begin{array}{l}u'(x)=1/x\\ v(x)=x\end{array}\right..$$

Par intégration par parties, on a :

$$\int_1^e \ln(x)dx=\Big[x\ln(x)\Big]_1^e-\int_1^e\frac{1}{x}dxdx=e\ln(e)-\int_1^e 1dx=e-(e-1)=1$$

(b) X admet une espérance car bornée (h est non-nulle sur un segment), et on a :

$$\begin{aligned}E(X)&=\int_{-\infty}^{+\infty}xh(x)dx\\ &=\int_1^e x\frac{8}{e^2+11}f(x)dx\\ &=\frac{8}{e^2+11}\int_1^e\left(\frac{x^2}{4}+(1+\ln(x))\right)dx\\ &=\frac{8}{e^2+11}\left(\left[\frac{x^3}{12}+x\right]_1^e+1\right)\\ &=\frac{8}{e^2+11}\left(\frac{e^3}{12}+e-\frac{1}{12}\right)=\frac{2\big(e^3+12e-1\big)}{3\big(e^2+11\big)}\end{aligned}$$

CONCOURS ECRICOME PREPA

EXERCICE 3

Partie I - Étude de l'urne du n-ième tirage

1. U_2 se réalise si, au cours du premier tirage, on a tiré (dans l'urne U) une boule noire, donc $P(U_2) = \frac{1}{3}$.

2. Sachant U_2, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_2}(U_3) = \frac{1}{3}$.
Sachant $\overline{U_2}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{4}$.
Comme $(U_2, \overline{U_2})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$P(U_3) = P(U_2 \cap U_3) + P(\overline{U_2} \cap U_3) = P(U_2)P_{U_2}(U_3) + P(\overline{U_2})P_{\overline{U_2}}(U_3) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} + \frac{1}{4}.\frac{2}{3} = \frac{5}{18}$$

3. (a) Sachant U_n, on fait des tirages dans l'urne U, donc : $P_{U_n}(U_{n+1}) = \frac{1}{3}$.
Sachant $\overline{U_n}$, on fait des tirages dans l'urne V : $P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) = \frac{1}{4}$.

   (b) Comme $(U_n, \overline{U_n})$ forme un système complet d'événements, on a d'après la formule des probabilités totales :

$$\begin{aligned} P(U_{n+1}) &= P(U_n)P_{U_n}(U_{n+1}) + P(\overline{U_n})P_{\overline{U_n}}(U_{n+1}) \\ &= \frac{1}{3}P(U_n) + \frac{1}{4}(1 - P(U_n)) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{1}{12}P(U_n) \end{aligned}$$

   (c) $\alpha = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}\alpha \iff \frac{11}{12}\alpha = \frac{1}{4} \iff \alpha = \frac{3}{11}$.

   (d) La suite $\left(P(U_n) - \frac{3}{11}\right)$ est géométrique de raison $\frac{1}{12}$. On en déduit que :

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\ P(U_n) = \frac{3}{11} + \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}\left(P(U_1) - \frac{3}{11}\right) = \frac{3}{11} + \frac{8}{11}\left(\frac{1}{12}\right)^{n-1}$$

   (e) Puisque $-1 < \frac{1}{12} < 1$, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{12}\right)^{n-1} = 0$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} P(U_n) = \frac{3}{11}$.

Partie II - Étude du nombre de boules blanches

1. On a $X_1(\Omega) = \{0, 1\}$, et puisqu'on fait un tirage dans l'urne U au premier tirage, on a :
$$P(X_1 = 0) = \frac{1}{3}, \quad \text{et} \quad P(X_1 = 1) = \frac{2}{3}$$
X_1 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $2/3$.

2. (a) Sachant $[X_1 = 0]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne U, donc :
$$P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{2}{3}$$
Sachant $[X_1 = 1]$, on fait le deuxième tirage dans l'urne V, donc :
$$P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{1}{4}$$
(b) On a $X_2(\Omega) = \{0, 1, 2\}$.
   - $P(X_2 = 0) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0)P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{1}{3}.\frac{1}{3} = \frac{1}{9}$
   - $P(X_2 = 2) = P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 2]) = P(X_1 = 1)P_{[X_1=1]}(X_2 = 2) = \frac{2}{3}.\frac{1}{4} = \frac{1}{6}$
   - On en déduit que $P(X_2 = 1) = 1 - \frac{1}{9} - \frac{1}{6} = \frac{13}{18}$.

(c) $E(X_2) = 0.P(X_2 = 0) + 1.P(X_2 = 1) + 2.P(X_2 = 2) = \frac{13}{18} + \frac{2}{6} = \frac{19}{18}$.

3.
```
    else
        res1=0
        tirage2=grand(1,1,'uin',1,3)
        if tirage2<3 then res2=1
        else res2= 0
        end
    end
```

4. Pour tout $n \geqslant 1$, $X_n(\Omega) = [\![0, n]\!]$. En effet, il est possible de n'avoir tiré que des boules noires, ou que des boules blanches, et toutes les situations intermédiaires sont possibles.
$[X_n = 0]$ se réalise si et seulement si on obtient n fois de suite une boule noire (donc toujours dans l'urne U), donc par probabilités composées on en déduit que :
$$P(X_n = 0) = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

5. A chaque tirage d'une boule blanche, on change d'urne. Si on a changé un nombre pair de fois d'urne, alors la $(n + 1)$-ième boule est bien tirée dans l'urne U.

6. En utilisant le SCE $([X_n = k])_{k\in[\![0,n]\!]}$, on a :
$$\begin{aligned} P(X_{n+1} = 1) &= \sum_{k=0}^{n} P(X_n = k)P_{[X_n=k]}(X_{n+1} = 1) \\ &= P(X_n = 0)P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) + P(X_n = 1)P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) \quad \text{(les autres probas conditionnnel} \\ &= \frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1) \end{aligned}$$

En effet, si $[X_n = 0]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne U, donc $P_{[X_n=0]}(X_{n+1} = 1) = \frac{2}{3}$ (proba de tirer une boule blanche dans U). De même, si $[X_n = 1]$ est réalisé, le $(n+1)$-ième tirage se fait dans l'urne V, donc $P_{[X_n=1]}(X_{n+1} = 1) = \frac{3}{4}$ (proba de tirer une boule noire dans V).

7. Pour tout $n \geqslant 1$,

$$\begin{aligned} u_{n+1} &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} P(X_{n+1} = 1) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n+1} \left(\frac{2}{3}P(X_n = 0) + \frac{3}{4}P(X_n = 1)\right) \\ &= \left(\frac{4}{3}\right)^{n} P(X_n = 1) + \frac{2}{3}\left(\frac{4}{3}\right)^{n+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{n} \\ &= u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^{n} \end{aligned}$$

8. (a)
- On a $u_1 = \dfrac{4}{3}P(X_1 = 1) = \dfrac{4}{3} \times \dfrac{2}{3} = \dfrac{8}{9} = \dfrac{8}{5}\left(1 - \dfrac{4}{9}\right)$.
- Soit $n \geqslant 1$. Supposons que $u_n = \dfrac{8}{5}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right)$. Alors :

$$u_{n+1} = u_n + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^n\right) + \frac{8}{9}\left(\frac{4}{9}\right)^n = \frac{8}{5}\left(1 - \left(\frac{4}{9}\right)^{n+1}\right)$$

- Par récurrence, on a donc bien que : $\forall n \geqslant 1, u_n = \dfrac{8}{5}\left(1 - \left(\dfrac{4}{9}\right)^n\right)$.

(b) On a donc : $P(X_n = 1) = \left(\dfrac{3}{4}\right)^n u_n = \dfrac{8}{5}\left(\dfrac{3}{4}\right)^n - \dfrac{8}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$.

(c) Comme $-1 < \dfrac{3}{4} < 1$ et $0 < \dfrac{1}{3} < 1$, on en déduit que $\lim\limits_{n \to +\infty} P(X_n = 1) = 0$.