BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 3 mai 2017, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.

EXERCICE 1.

Soit M et I les matrices d'ordre 3 définies par : $M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

1.a) Calculer M^2 et M^3 et en déduire à l'aide d'un raisonnement par l'absurde que M n'est pas inversible.

b) Pour tout entier $n \geqslant 3$, déterminer M^n.

c) Calculer $(I - M)(I + M + M^2)$. En déduire que $(I - M)$ est inversible et donner son inverse $(I - M)^{-1}$.

d) Déterminer un polynôme annulateur de la matrice M.

e) En déduire la seule valeur propre possible de M.

2. On pose : $S = M + I$.

a) À l'aide de la formule du binôme, exprimer pour tout $n \in \mathbf{N}$, la matrice S^n en fonction de I, M et M^2.

b) Déterminer la deuxième colonne de la matrice S^n.

3. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$, $(v_n)_{n\geqslant 0}$ et $(w_n)_{n\geqslant 0}$ les trois suites définies par :

$$u_0 = 0,\ v_0 = 1\ w_0 = 0 \text{ et } \forall n \in \mathbf{N},\ \begin{cases} u_{n+1} = 3u_n + v_n \\ v_{n+1} = -3u_n + w_n \\ w_{n+1} = u_n \end{cases}.$$

a) Établir pour tout $n \in \mathbf{N}$, l'égalité : $\begin{pmatrix} u_{n+1} \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$.

b) En déduire pour tout $n \in \mathbf{N}$, la relation : $\begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = S^n \begin{pmatrix} u_0 \\ v_0 \\ w_0 \end{pmatrix}$.

c) Exprimer u_n, v_n et w_n en fonction de n. Montrer que $u_n + v_n + w_n = 1$.

Tournez la page S.V.P.

4. Dans cette question, on se propose de déterminer une matrice J d'ordre 3, triangulaire supérieure, à cœfficients diagonaux tous nuls et une matrice P d'ordre 3, inversible, qui vérifient la relation : $J = PMP$.

   a) On pose : $U = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Calculer les matrices colonnes V et W définies par : $V = -MU$ et $W = M^2U$.

   b) Soit P la matrice d'ordre 3 dont la première colonne est W, la deuxième est V et la troisième est U. Calculer P^2 ; en déduire que P est inversible et donner son inverse P^{-1}.

   c) Expliciter la matrice $J = PMP$.

EXERCICE 2.

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ deux suites définies par :

$$u_1 = 1,\ v_1 = 2 \text{ et } \forall n \geqslant 1,\ u_{n+1} = \frac{u_n^2}{u_n + v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{v_n^2}{u_n + v_n}.$$

1. Vérifier que $u_2 = \dfrac{1}{3}$ et $v_2 = \dfrac{4}{3}$, puis calculer u_3 et v_3.
2. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $u_n > 0$ et $v_n > 0$.
3. Montrer que les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ et $(v_n)_{n\geqslant 1}$ sont décroissantes et convergentes.
4. On pose : $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell' = \lim\limits_{n\to+\infty} v_n$.

   a) Montrer que la suite $(u_n - v_n)_{n\geqslant 1}$ est constante et en déduire une relation entre ℓ et ℓ'.

   b) En utilisant la relation $u_{n+1}(u_n + v_n) = u_n^2$, montrer que $\ell\,\ell' = -1$.

   c) Déterminer ℓ et ℓ'.
5. Recopier et compléter les lignes (6) et (7) du programme *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche les valeurs de u_n et v_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) u=1
(3) v=2
(4) for k=2:n
(5)     a=u
(6)     u= .........
(7)     v= .........
(8) end
(9) disp(u)
(10) disp(v)
```

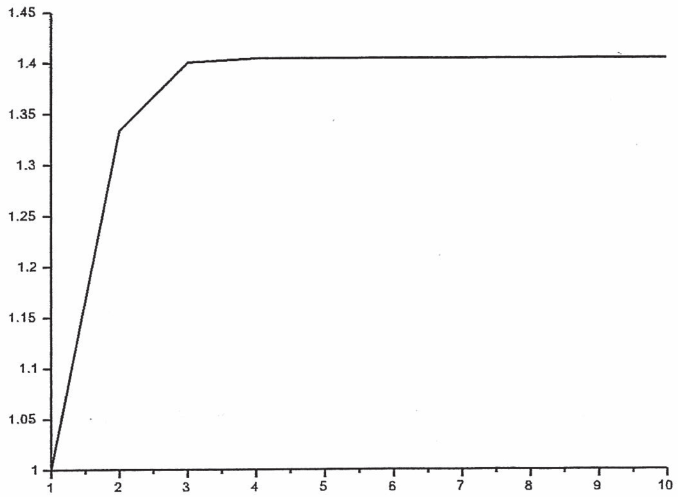
6. On considère le programme précédent avec les instructions supplémentaires :

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) u=1
(3) v=2
(4) s=ones(1,n)
(5) for k=2:n
(6)     a=u
(7)     u= .........
(8)     v= .........
(9)     s(k)=u
```

```
end
disp(u)
disp(v)
x=1:n
y=cumsum(s)
plot2d(x,y)
```

a) Que contiennent les variables s et y à l'issue du programme ?

b) Ce programme fournit la sortie graphique suivante pour la valeur $n = 10$.



Quel résultat ce graphique permet-il de conjecturer ?

EXERCICE 3.

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$ et sous réserve d'existence, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire U sont notées respectivement $E(U)$ et $V(U)$.

Soit a un réel vérifiant $-\dfrac{1}{2} \leqslant a \leqslant \dfrac{1}{2}$ et f la fonction définie sur $\mathbf{R}$ par : $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1-a}{2} & \text{si } -1 \leqslant x \leqslant 0 \\ \dfrac{1+a}{2} & \text{si } 0 < x \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

   Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité et on suppose que le paramètre a est inconnu.

2. Calculer $E(X)$ et montrer que $V(X) = \dfrac{4 - 3\,a^2}{12}$.

3. Déterminer la fonction de répartition F_X de la variable aléatoire X.

4. Pour n entier de $\mathbf{N}^*$, on considère n variables aléatoires $X_1, X_2, \ldots, X_n$ indépendantes et suivant toutes la même loi que X. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $\overline{X}_n = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Montrer que la variable aléatoire $Y_n = 2\,\overline{X}_n$ est un estimateur sans biais du paramètre a.

   b) En déduire le risque quadratique de Y_n en tant qu'estimateur de a.

   c) Soit ε un réel strictement positif. En appliquant l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev à Y_n, établir l'inégalité :

$$P\big([|Y_n - a| \leqslant \varepsilon]\big) \geqslant 1 - \frac{4}{3\,n\,\varepsilon^2}\,.$$

5. Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires Z_n et T_n par :

- Z_n est le nombre de variables aléatoires parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui prennent des valeurs inférieures ou égales à $\frac{1}{2}$;
- T_n est le nombre de variables aléatoires parmi $X_1, X_2, \ldots, X_n$ qui prennent des valeurs strictement supérieures à $\frac{1}{2}$.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose : $W_n = 1 + \frac{2}{n}(T_n - Z_n)$.

a) Justifier que Z_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3-a}{4}\right)$ et que T_n suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{1+a}{4}\right)$.

b) Vérifier que W_n est un estimateur sans biais de a.

c) Que vaut $T_n + Z_n$? En utilisant la valeur de $V(T_n + Z_n)$, calculer $\mathrm{Cov}(T_n, Z_n)$.

d) En déduire la valeur de $V(W_n)$. Calculer le risque quadratique de W_n en tant qu'estimateur de a. Quelle est la limite de ce risque quadratique lorsque n tend vers $+\infty$?

EXERCICE 4.

On pose $I_0 = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ et pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \displaystyle\int_0^1 x^n\,\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x$.

1.a) Établir pour tout $x \in [0,1]$, l'encadrement : $0 \leqslant \mathrm{e}^{-x^2} \leqslant 1$.

b) En déduire que pour tout entier naturel n, on a : $0 \leqslant I_n \leqslant \frac{1}{n+1}$.

c) Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbf{N}}$.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$ par : $\forall x \in [0,1],\ f(x) = \mathrm{e}^{-x^2}$. On note f' la dérivée de f.

a) Pour tout $x \in [0,1]$, calculer $f'(x)$.

b) En déduire que $I_1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

3.a) En utilisant l'identité $x^{n+2}\,\mathrm{e}^{-x^2} = x^{n+1} \times x\,\mathrm{e}^{-x^2}$ et à l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation : $I_{n+2} = \frac{n+1}{2} I_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$.

b) Déterminer la limite de nI_n lorsque n tend vers $+\infty$.

4. Pour tout entier naturel n, on pose : $u_n = \frac{I_{2n+1}}{n!}$.

a) Établir la relation : $u_{n+1} = u_n - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \times \frac{1}{(n+1)!}$. En déduire que : $\forall n \in \mathbf{N},\ u_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}} \displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}$.

b) Donner sous forme de somme, l'expression de I_{2n+1} en fonction de n.

c) Vérifier que pour tout entier $k \geqslant 1$, on a : $I_{2k+1} = k\,I_{2k-1} - \frac{1}{2\,\mathrm{e}}$. À l'aide de cette relation et de la valeur de I_1, compléter le script *Scilab* suivant afin qu'il calcule et affiche la valeur de I_{2n+1} pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
(1) n=input ('entrer la valeur de n :')
(2) I=1/2-1/(2*%e)
(3)   for k=1:n
(4)   I=.........
(5) end
(6) disp(I)
```

IMPRIMERIE NATIONALE – 17 1322 – D'après documents fournis