ECRICOME 2017

Exercice 1 –

Partie I – Calcul matriciel

1. Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 9 & -9 & 3 \\ -2 & 4 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+9-4 & 1-9+8 & 1+3-4 \\ 2-2 & 2+4 & 2-2 \\ 3-9+6 & 3+9-12 & 3-3+6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} = 6I_3.$$

Par conséquent, j'en déduis que $P \times \left(\frac{1}{6}Q\right) = I_3$, ce qui suffit à prouver que la matrice P est inversible et que son inverse vaut $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$.

2. Je note $X_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_1 est non nul et $MX_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \\ 15 \end{pmatrix} = 5X_1$.
Ainsi X_1 est vecteur propre de la matrice M, associé à la valeur propre 5.
Je note $X_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_2 est non nul et $MX_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = X_2$.
Ainsi X_2 est vecteur propre de la matrice M, associé à la valeur propre 1.
Je note $X_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}$. Le vecteur X_3 est non nul et $MX_3 = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -6 \end{pmatrix} = 2X_3$.
Ainsi X_3 est vecteur propre de la matrice M, associé à la valeur propre 2.

3. La matrice M est une matrice carrée de taille 3×3 qui possède trois valeurs propres distinctes. Alors comme P est la matrice construite comme la juxtaposition des trois vecteurs propres X_1, X_2 et X_3, je sais déjà que P est inversible, mais en notant D la matrice diagonale composée des valeurs propres de M, $\quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $\quad$ j'en déduis aussi que

$$M = PDP^{-1}, \quad \textit{i.e.} \quad M = PD\left(\frac{1}{6}Q\right) = \frac{1}{6}PDQ.$$

4. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \frac{1}{6}PD^0Q = \frac{1}{6}PI_3Q = \frac{1}{6}PQ = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence,je sais que $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$ et d'après la question **3.**, je sais aussi que $M = \frac{1}{6}PDQ$. $\quad$ Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = \left(\frac{1}{6}PD^nQ\right) \times \left(\frac{1}{6}PDQ\right) = \frac{1}{6}PD^n\left(Q \times \frac{1}{6}P\right)DQ.$$

Comme $P^{-1} = \frac{1}{6}Q$, alors $Q \times \frac{1}{6}P = I_3$ et donc

$$M^{n+1} = \frac{1}{6}PD^n I_3 DQ = \frac{1}{6}PD^n DQ = \frac{1}{6}PD^{n+1}Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = \frac{1}{6}PD^nQ.$$

5. La première colonne de la matrice M^n est obtenue en effectuant le produit de la matrice M^n par la matrice colonne $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$. D'après la question précédente, je sais que $M^n = \frac{1}{6}PD^nQ$.

   Et comme la matrice D est diagonale, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$D^n = \begin{pmatrix}5^n & 0 & 0\\ 0 & 1^n & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}.$$

   En effectuant successivement les produits de matrices de droite à gauche, j'obtiens que

$$M^n \times \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}PD^nQ\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}PD^n\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 9 & -9 & 3\\ -2 & 4 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6}P\begin{pmatrix}5^n & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 2^n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\9\\-2\end{pmatrix}$$
$$= \frac{1}{6}\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 2 & 0 & 1\\ 3 & -1 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5^n\\ 9\\ -2^{n+1}\end{pmatrix} = \frac{1}{6}\begin{pmatrix}5^n + 9 - 2^{n+2}\\ 2 \times 5^n - 2^{n+1}\\ 3 \times 5^n - 9 + 3 \times 2^{n+1}\end{pmatrix}.$$

   En conclusion, j'ai bien montré que la première colonne de la matrice M^n est égale à

$$\frac{1}{6}\begin{pmatrix}5^n - 2^{n+2} + 9\\ 2\left(5^n - 2^n\right)\\ 3\left(5^n + 2^{n+1}\right) - 9\end{pmatrix}.$$

Partie II – Étude de l'entraînement d'un athlète au triathlon

1. Selon l'énoncé, l'athlète commence son entraînement par la natation donc

$$a_0 = 1, \qquad b_0 = 0 \quad \text{et} \quad c_0 = 0.$$

   Puis selon les règles d'entraînement indiquées dans l'énoncé, comme l'athlète a pratiqué la natation le jour 0, il pratiquera au jour 1 :

   - la natation avec une probabilité $1/5$,
   - le cyclisme avec une probabilité $1/5$,
   - la course à pied avec une probabilité $3/5$.

   Autrement dit,

$$a_1 = \frac{1}{5}, \qquad b_1 = \frac{1}{5} \quad \text{et} \quad c_1 = \frac{3}{5}.$$

2. Soit un entier $n \in \mathbb{N}$ fixé. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{A_n, B_n, C_n\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} a_{n+1} = P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(B_n \cap A_{n+1}) + P(C_n \cap A_{n+1}) \\ &= P(A_n)P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(A_{n+1}) \\ &= a_n \times \frac{1}{5} + b_n \times \frac{2}{5} + c_n \times 0 = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n. \end{aligned}$$

De la même manière, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales, j'obtiens

$$b_{n+1} = P(B_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n$$

et

$$c_{n+1} = P(C_{n+1}) = P(A_n)P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n)P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n)P_{C_n}(C_{n+1}) = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$$

En conclusion, pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n, \qquad b_{n+1} = \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n.$$

3. Grâce aux formules précédentes, je peux écrire que

$$\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5}a_n + \frac{2}{5}b_n \\ \frac{1}{5}a_n + \frac{3}{5}b_n + \frac{1}{5}c_n \\ \frac{3}{5}a_n + \frac{4}{5}c_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Alors pour obtenir $A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$, il me suffit de poser

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{5} & \frac{2}{5} & 0 \\ \frac{1}{5} & \frac{3}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{3}{5} & 0 & \frac{4}{5} \end{pmatrix} = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix} = \frac{1}{5}M.$$

Je remarque alors que la matrice A s'exprime comme un multiple de la matrice M de la **Partie I**. Pour résumer, en posant $A = \frac{1}{5}M$, j'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ c_{n+1} \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}.$$

4. Pour simplifier l'écriture, je note Y_n la matrice colonne $Y_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{pmatrix}$.
L'expression à démontrer devient alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \frac{1}{5^n}M^n\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

alors que la question précédente se réécrit : $\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_{n+1} = \frac{1}{5}MY_n$.

Je procède alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $Y_n = \dfrac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$Y_0 = \begin{pmatrix}a_0\\b_0\\c_0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \frac{1}{5^0} M^0 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = 1 \times I_3 \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $Y_n = \dfrac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$ et d'après la question **3.**, je sais que $Y_{n+1} = \dfrac{1}{5} M Y_n$. Alors

$$Y_{n+1} = AY_n = \frac{1}{5} M \times \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5^{n+1}} M^{n+1} \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est héréditaire et que $\mathcal{P}_0$ est vraie, alors par principe de récurrence, la propriété $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad Y_n = \begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}.$$

5. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question **5.** de la **Partie I**, je sais que

$$M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2\left(5^n - 2^n\right) \\ 3\left(5^n + 2^{n+1}\right) - 9 \end{pmatrix}.$$

Alors en combinant avec la question précédente, j'obtiens que

$$\begin{pmatrix}a_n\\b_n\\c_n\end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} M^n \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \frac{1}{5^n} \times \frac{1}{6} \begin{pmatrix} 5^n - 2^{n+2} + 9 \\ 2\left(5^n - 2^n\right) \\ 3\left(5^n + 2^{n+1}\right) - 9 \end{pmatrix}.$$

Puis par identification des coefficients, il vient que

$$a_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times \left(5^n - 2^{n+2} + 9\right) = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n,$$

$$b_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times \left(2\left(5^n - 2^n\right)\right) = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right),$$

$$c_n = \frac{1}{6} \times \frac{1}{5^n} \times \left(3\left(5^n + 2^{n+1}\right) - 9\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

En conclusion, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = \frac{1}{6} - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{5}\right)^n + \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{5}\right)^n, \qquad b_n = \frac{1}{3}\left(1 - \left(\frac{2}{5}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad c_n = \frac{1}{2} + \left(\frac{2}{5}\right)^n - \frac{3}{2}\left(\frac{1}{5}\right)^n.$$

6. Je cherche les limites de chacune de ces trois suites. Elle sont composées de suites géométriques dont je connais les limites.

Comme $\dfrac{2}{5} \in \left]-1,1\right[$ et $\dfrac{1}{5} \in \left]-1,1\right[$, je sais que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{2}{5}\right)^n = 0$ et $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{5}\right)^n = 0$.

Par conséquent, par somme de limites, j'en déduis que

$$\lim_{n\to+\infty} a_n = \frac{1}{6}, \qquad \lim_{n\to+\infty} b_n = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad \lim_{n\to+\infty} c_n = \frac{1}{2}.$$

Exercice 2 –

Partie I – Tirages dans une urne

1. a) En considérant comme succès l'événement "piocher une boule noire", la variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de la répétition successive de 400 expériences de Bernoulli identiques et indépendantes. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 400$ et $p = \dfrac{1}{4}$, puisque une seule boule parmi les quatre boules de l'urne est noire.
   En particulier, le support est donné par $X(\Omega) = [\![0, 400]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,
   $$P(X = k) = \binom{400}{k}\left(\frac{1}{4}\right)^k\left(\frac{3}{4}\right)^{400-k}.$$

   b) Puisque X suit une loi binomiale, alors
   $$E(X) = np = 400 \times \frac{1}{4} = 100 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 100 \times \frac{3}{4} = 25 \times 3 = 75.$$

2. a) Y compte cette fois le nombre de tirages nécessaires avant d'obtenir un premier succès, lors de la répétition successive d'expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.
   Donc Y suit une loi géométrique de paramètre $p = \dfrac{1}{4}$.
   En particulier, le support est donné par $Y(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in Y(\Omega)$,
   $$P(Y = k) = \frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^{k-1}.$$

   b) Puisque Y suit une loi géométrique, alors
   $$E(Y) = \frac{1}{p} = \frac{1}{\frac{1}{4}} = 4 \quad \text{et} \quad V(Y) = \frac{1-p}{p^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\left(\frac{1}{4}\right)^2} = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{1}{16}} = \frac{3}{4} \times 16 = 12.$$

3. a) La variable aléatoire Z ne semble pas suivre un loi usuelle. En revanche, il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie puisque les valeurs possibles pour Z sont 1, 2, 3 et 4. Alors le support est donné par $Z(\Omega) = [\![1, 4]\!]$ et pour déterminer la loi de Z, il suffit de calculer $P(Z = 1)$, $P(Z = 2)$, $P(Z = 3)$ et $P(Z = 4)$, en utilisant la formule des probabilités composées. J'obtiens alors
   $$P(Z = 1) = \frac{1}{4}, \qquad P(Z = 2) = \frac{3}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{4},$$
   $$P(Z = 3) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}, \qquad P(Z = 4) = \frac{3}{4} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4}.$$
   Alors après calculs, je remarque que Z suit la loi uniforme sur $[\![1, 4]\!]$.

   b) Comme Z suit une loi uniforme, alors
   $$E(Z) = \frac{n+1}{2} = \frac{4+1}{2} = \frac{5}{2} \quad \text{et} \quad V(Z) = \frac{n^2-1}{12} = \frac{4^2-1}{12} = \frac{15}{12} = \frac{5}{4}.$$

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

1. La variable aléatoire T compte le nombre de boules noires obtenues après deux tirages. Aucune, une ou deux boules noires peuvent avoir été piochées. Donc $T(\Omega) = [\![0, 2]\!]$.

2. Je note P l'événement "obtenir PILE", F l'événement "obtenir FACE" et pour tout $k \in [\![0,2]\!]$, N_k l'événement "obtenir une boule noire au k-ième tirage" et B_k l'événement "obtenir une boule blanche au k-ième tirage". Alors d'après la formule des probabilités totales, comme les événements P et F forment un système complet d'événements,
$$P(T=0) = P(F)\times P_F\big(B_1\cap B_2\big) + P(P)\times P_P\big(B_1\cap B_2\big) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}+\frac{9}{32} = \frac{13}{32}.$$
De même,
$$P(T=2) = P(F)\times P_F\big(N_1\cap N_2\big) + P(P)\times P_P\big(N_1\cap N_2\big) = \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{8}+\frac{1}{32} = \frac{5}{32}.$$
Et finalement
$$P(T=1) = 1 - P(T=0) - P(T=2) = 1 - \frac{13}{32} - \frac{5}{32} = \frac{14}{32} = \frac{7}{16}.$$
3. Comme il s'agit d'une variable aléatoire discrète finie,
$$E(T) = 0\times P(T=0)+1\times P(T=1)+2\times P(T=2) = 0\times\frac{13}{32}+1\times\frac{7}{16}+2\times\frac{5}{32} = \frac{2\times 7+10}{32} = \frac{24}{32} = \frac{3}{4}.$$
Si la variable aléatoire T suivait une loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$, comme $T(\Omega) = [\![0,2]\!]$, alors nécessairement n serait égal à 2. Dans ce cas, l'espérance serait $E = np = 2p$, ce qui force $p = \frac{3}{8}$.
Ainsi la seule loi binomiale possible serait $\mathcal{B}\left(2,\frac{3}{8}\right)$. Mais alors la probabilité $P(T=2)$ serait égale à $p^2 = \left(\frac{3}{8}\right)^2 = \frac{9}{64}$, ce qui n'est pas le cas puisque $P(T=2) = \frac{5}{32}$.
J'en déduis donc que T ne suit pas une loi binomiale.
4. Je calcule puis compare les deux probabilités $P_{T=1}(P)$ et $P_{T=1}(F)$:
$$P_{T=1}(P) = \frac{P\big(P\cap[T=1]\big)}{P(T=1)} = \frac{\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}\right)}{\frac{7}{16}} = \frac{\frac{3}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{3}{7}.$$
Et donc
$$P_{T=1}(F) = 1 - P_{T=1}(P) = 1 - \frac{3}{7} = \frac{4}{7}.$$
Il est donc plus probable d'avoir obtenu FACE que PILE si une seule boule noire est piochée.
5. Voici le programme complété :

```
T=0
if grand(1,1,"uin",1,2)==1 then
    for k=1:2
        if grand(1,1,"uin",1,4)<2 then
            T=T+1
        end
    end
else
    for k=1:2
        if grand(1,1,"uin",1,4)<3 then
            T=T+1
        end
    end
end
disp(T,"Une simulation de T donne :")
```

Exercice 3 –

Partie I – Étude d'une fonction

1. Je note D_f l'ensemble de définition de la fonction f. Je sais que la fonction ln est définie sur $\mathbb{R}_+^*$ donc $D_f \subset \mathbb{R}_+^*$. L'autre condition est que x^3 ne doit pas s'annuler sur D_f, *i.e.* $0 \notin D_f$. Ainsi j'obtiens que l'ensemble de définition de f est donné par $D_f = \mathbb{R}_+^* =]0, +\infty[$.
2. Soit $x > 0$. Directement je sais que $x^3 > 0$ donc
$$f(x) \geqslant 0 \iff \frac{4\ln(x)}{x^3} \geqslant 0 \iff \ln(x) \geqslant 0 \iff x \geqslant 1.$$
3. Je calcule la limite en 0 en décomposant la fraction :
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to 0} 4\ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to 0} x^3 = 0^+\end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to 0} f(x) = -\infty.$$
J'en déduis que l'axe des ordonnées est asymptote verticale à la courbe $\mathcal{C}_f$.

   Par ailleurs, par croissances comparées, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x^3} = 0$, donc $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0$.
J'en déduis que l'axe des abscisses est asymptote horizontale à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
4. Pour étudier les variations de f, il me faut étudier le signe de la dérivée f'.
Or la fonction f est dérivable sur $\mathbb{R}_+^*$ et de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 4\ln(x)$ et $v(x) = x^3$. Comme $u'(x) = \dfrac{4}{x}$ et $v'(x) = 3x^2$, j'en déduis que
$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{\frac{4}{x} \times x^3 - 4\ln(x) \times 3x^2}{x^6} = \frac{4x^2\big(1 - 3\ln(x)\big)}{x^6} = \frac{4\big(1 - 3\ln(x)\big)}{x^4}.$$
Ainsi $f'(x)$ est du signe de $1 - 3\ln(x)$, puisque 4 et x^4 sont toujours positifs. Or
$$1 - 3\ln(x) \geqslant 0 \iff 3\ln(x) \leqslant 1 \iff \ln(x) \leqslant \frac{1}{3} \iff x \leqslant e^{\frac{1}{3}},$$
et
$$f\left(e^{\frac{1}{3}}\right) = \frac{4\ln\left(e^{\frac{1}{3}}\right)}{\left(e^{\frac{1}{3}}\right)^3} = \frac{4 \times \frac{1}{3}}{e} = \frac{4}{3e}.$$
De toutes ces informations, je déduis le tableau de variation de f :

x	0		$e^{\frac{1}{3}}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{4}{3e}$	$\searrow$	0

   Ainsi f admet le maximum $\dfrac{4}{3e}$ comme unique extremum, atteint lorsque $x = e^{\frac{1}{3}}$.

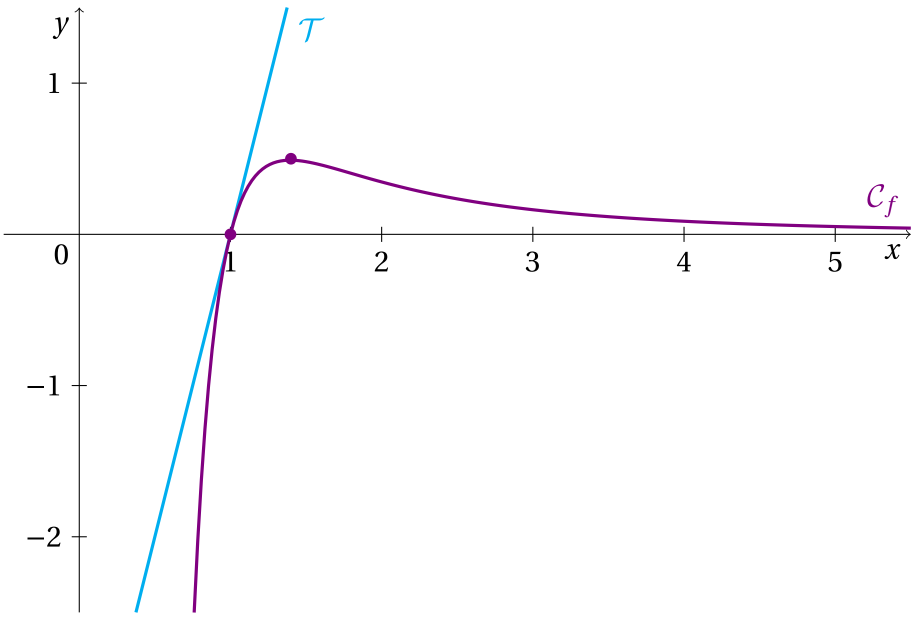
5. La tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 1 a pour équation $y = f'(1)(x-1) + f(1)$. Or

$$f(1) = \frac{4\ln(1)}{1^3} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{4(1-3\ln(1))}{1^4} = 4,$$

donc une équation de $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = 4(x-1) + 0, \qquad i.e. \quad y = 4x - 4.$$

6. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente $\mathcal{T}$.



Partie II – Étude d'une variable aléatoire à densité

1. Soit $A \geqslant 1$. Je pose

$$u'(x) = \frac{4}{x^3} = 4x^{-3} \qquad u(x) = 4 \times \frac{x^{-2}}{-2} = -\frac{2}{x^2}$$
$$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$

Alors par intégration par parties,

$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{2\ln(x)}{x^2}\right]_1^A - \int_1^A -\frac{2}{x^2} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{2\ln(A)}{A^2} + \frac{2\ln(1)}{1^2} + \int_1^A \frac{2}{x^3}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{2\ln(A)}{A^2} + \left[-\frac{1}{x^2}\right]_1^A = -\frac{2\ln(A)}{A^2} - \frac{1}{A^2} + \frac{1}{1^2} = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}.$$

J'ai bien montré que $\displaystyle\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = 1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}$.

2.
   - Pour $x < 1$, $h(x) = 0 \geqslant 0$ et pour $x \geqslant 1$, $h(x) = \dfrac{4\ln(x)}{x^3} \geqslant 0$, d'après la question **2.** de la **Partie I**. Donc $\forall x \in \mathbb{R}, \quad h(x) \geqslant 0$.
   - La fonction h est continue sur $]-\infty, 1[$ car constante et elle est continue sur $[1, +\infty[$ comme quotient de fonctions continues. Donc h admet au plus un point de discontinuité.

- Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

  Or $\displaystyle\int_{-\infty}^{1} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0 et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x$.

  D'après la question précédente, $\displaystyle\int_{1}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_{1}^{A} \frac{4\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = 1-\frac{1}{A^2}-\frac{2\ln(A)}{A^2}$.

  Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{1}{A^2}=0$ et par croissances comparées $\displaystyle\lim_{A\to+\infty}\frac{\ln(A)}{A^2}=0$ donc par somme,

  $$\lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_{1}^{A} \frac{4\ln(x)}{x^3}\,\mathrm{d}x = 1-0-2\times 0 = 1.$$

  Finalement, j'obtiens que $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 1.

  Puis par la relation de Chasles, l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

  $$\int_{-\infty}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-\infty}^{a} h(x)\,\mathrm{d}x + \int_{a}^{+\infty} h(x)\,\mathrm{d}x = 0+1=1.$$

Selon les trois points précédents, h décrit bien une densité de probabilité.

3. a) Par définition de la fonction de répartition de X, je sais que

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad F(x)=\int_{-\infty}^{x} h(t)\,\mathrm{d}t.$$

- Si $x<1$, alors $\displaystyle F(x)=\int_{-\infty}^{x} 0\,\mathrm{d}t = 0$.
- Sinon $x\geqslant 1$ et en utilisant la question **1.**, je sais que

$$F(x)=\int_{-\infty}^{1} 0\,\mathrm{d}t + \int_{1}^{x} f(t)\,\mathrm{d}t = 1-\frac{1}{x^2}-\frac{2\ln(x)}{x^2}.$$

Ainsi la fonction de répartition F de X est donnée par

$$F(x)=\begin{cases} 0 & \text{si } x<1,\\ 1-\dfrac{1}{x^2}-\dfrac{2\ln(x)}{x^2} & \text{si } x\geqslant 1.\end{cases}$$

b) Le programme suivant répond à la question posée.

```
1  function calcul=F(x)
2      if x<1 then
3          calcul=0
4      else
5          calcul=1-1/(x∧2)-2*log(x)/(x∧2)
6      end
7  endfunction
8
9  for i=1:300, a(i)=-2+7*i/300; b(i)=F(a(i));
10 end
11 plot(a,b)
```

c) Exécuter les lignes 9 à 11 du programme permet de tracer la courbe représentative de la fonction F sur l'intervalle $[-2,5]$.

4. Soit $A \geqslant 1$. Je calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^A xh(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ par intégration par parties.
Je pose
$$u'(x) = \frac{4}{x^2} = 4x^{-2} \qquad u(x) = 4 \times \frac{x^{-1}}{-1} = -\frac{4}{x}$$
$$v(x) = \ln(x) \qquad v'(x) = \frac{1}{x}$$
Alors par intégration par parties,
$$\int_1^A \frac{4\ln(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{4\ln(x)}{x}\right]_1^A - \int_1^A -\frac{4}{x} \times \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = -\frac{4\ln(A)}{A} + \frac{4\ln(1)}{1} + \int_1^A \frac{4}{x^2}\,\mathrm{d}x$$
$$= -\frac{4\ln(A)}{A} + \left[-\frac{4}{x}\right]_1^A = -\frac{4\ln(A)}{A} - \frac{4}{A} + \frac{4}{1} = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}.$$
J'ai bien montré que $\displaystyle\int_1^A xh(x)\,\mathrm{d}x = 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A}$.
Comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{4}{A} = 0$ et que, par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\ln(A)}{A} = 0$, j'en déduis que
$$\lim_{A\to+\infty} 4 - \frac{4}{A} - \frac{4\ln(A)}{A} = 4.$$
De plus, h est nulle sur $]-\infty, 1[$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^1 xh(x)\,\mathrm{d}x$ converge et vaut 0.
Par conséquent, X admet une espérance et $\displaystyle E(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} xh(x)\,\mathrm{d}x = 0 + 4 = 4$.

5. Encore une fois, pour $A \geqslant 1$, je calcule l'intégrale $\displaystyle\int_1^A x^2 h(x)\,\mathrm{d}x$:
$$\int_1^A x^2 h(x)\,\mathrm{d}x = \int_1^A \frac{4\ln(x)}{x}\,\mathrm{d}x = 4\int_1^A \frac{1}{x} \times \ln(x)\,\mathrm{d}x = \Big[2\big(\ln(x)\big)^2\Big]_1^A = 2\big(\ln(A)\big)^2.$$
Or $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} 2\big(\ln(A)\big)^2 = +\infty$ donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 h(x)\,\mathrm{d}x$ diverge.
Donc X^2 n'admet pas d'espérance et X n'admet pas de variance.

6. Soit $A \geqslant 1$. Par définition des probabilités conditionnelles,
$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{P\big([X>A] \cap [X>2A]\big)}{P(X>A)} = \frac{P(X>2A)}{P(X>A)} = \frac{1-F(2A)}{1-F(A)}.$$
En utilisant le résultat obtenu à la question **3.**, comme $A \geqslant 1$, alors
$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1 - \left(1 - \frac{1}{(2A)^2} - \frac{2\ln(2A)}{(2A)^2}\right)}{1 - \left(1 - \frac{1}{A^2} - \frac{2\ln(A)}{A^2}\right)} = \frac{\frac{1}{4A^2} + \frac{2\ln(2A)}{4A^2}}{\frac{1}{A^2} + \frac{2\ln(A)}{A^2}} = \frac{\frac{1+2\ln(2A)}{4A^2}}{\frac{4+8\ln(A)}{4A^2}} = \frac{1+2\ln(2A)}{4+8\ln(A)}.$$
J'ai bien montré que $\displaystyle P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1+2\ln(2A)}{4+8\ln(A)}$.
Puis par propriété du logarithme, $\ln(2A) = \ln(2) + \ln(A)$. Alors en factorisant par $\ln(A)$,
$$P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1+2\ln(2)+2\ln(A)}{4+8\ln(A)} = \frac{\ln(A)\left(\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2\right)}{\ln(A)\left(\frac{4}{\ln(A)} + 8\right)} = \frac{\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2}{\frac{4}{\ln(A)} + 8}.$$
Enfin comme $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \ln(A) = +\infty$, j'en déduis que $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} \frac{\frac{1}{\ln(A)} + \frac{2\ln(2)}{\ln(A)} + 2}{\frac{4}{\ln(A)} + 8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.
En conclusion, $\displaystyle\lim_{A\to+\infty} P_{[X>A]}(X > 2A) = \frac{1}{4}$.