BANQUE COMMUNE D'ÉPREUVES

Code sujet : 285

Conception : ESCP Europe

OPTION TECHNOLOGIQUE

MATHÉMATIQUES

Mercredi 4 mai 2016, de 8 h. à 12 h.

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Ils ne doivent faire usage d'aucun document. ***L'utilisation de toute calculatrice et de tout matériel électronique est interdite.*** *Seule l'utilisation d'une règle graduée est autorisée.*
Si au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il la signalera sur sa copie et poursuivra sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il sera amené à prendre.

- *L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants.*
- *La probabilité d'un événement G est notée $P(G)$.*
- *Sous réserve d'existence, on note $E(T)$ et $V(T)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire T.*

EXERCICE 1

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 définie par : $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

1. On rappelle qu'un polynôme R est annulateur de la matrice A si $R(A) = 0$.

   a) Calculer A^2, A^3 et $A^3 - A^2 - 2A$.

   b) En déduire un polynôme R non nul, annulateur de la matrice A.

   c) Déterminer les racines du polynôme R.

   d) En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.

2.a) Vérifier que les trois vecteurs $U_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $U_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$ et $U_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ sont des vecteurs propres de la matrice A et donner les valeurs propres λ_1, λ_2 et λ_3 associées.

b) On pose : $D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 3 & -3 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer son inverse P^{-1}.

Tournez la page S.V.P.

c) Vérifier la relation $AP = PD$. La matrice A est-elle diagonalisable ?

3.a) Établir par récurrence, pour tout entier $n \geqslant 1$, la relation : $A^n = PD^nP^{-1}$.

b) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, la matrice A^n sous forme explicite.

4. On note I la matrice identité d'ordre 3. Soit M la matrice carrée définie par : $M = I - 2\,A + 5\,A^2$.

a) Montrer que $A^2P = PD^2$. En déduire l'égalité : $MP = P(I - 2\,D + 5\,D^2)$.

b) Déduire de la question 4.a) que M est diagonalisable et donner ses valeurs propres.

EXERCICE 2

Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par : $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, $u_{n+1} = \ln(1 + u_n^2)$.

1. Compléter le programme *Scilab* suivant pour qu'il calcule et affiche u_n pour une valeur de n entrée par l'utilisateur.

```
n=input('entrer la valeur de n')
u= ······
for k=1:n
u= ······
end
disp(u)
```

2. Établir pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, l'encadrement suivant : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0, 1]$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = \ln(1 + x^2) - x$.

a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$.

b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.

c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

4.a) Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité : $\ln(1 + x) \leqslant x$.

b) Pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, établir l'inégalité : $u_{n+1} \leqslant u_n^2$.

c) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité : $u_n \leqslant (\ln 2)^n$.

d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

e) On considère le programme *Scilab* suivant :

```
n=0
u=1
while u>=0.0001
u=log(1+u^2)
n=n+1
end
disp(n)
```

On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6. Quelle est la signification de ce résultat ?

5. Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1 - (\ln 2)^n}{1 - \ln 2}$.

EXERCICE 3

Dans tout l'exercice, a désigne un paramètre réel strictement positif.

Soit f la fonction définie sur $\mathbf{R}$, à valeurs réelles, telle que : $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \dfrac{3x^2}{a^3} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 0 & \text{si } x > a \end{cases}$.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

Dans la suite de l'exercice, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

2. Calculer $E(X)$. Montrer que l'on a : $V(X) = \dfrac{3\,a^2}{80}$.

3. On note F_X la fonction de répartition de X. Montrer que l'on a : $F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^3 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$.

On suppose désormais que le paramètre a est inconnu et on souhaite l'estimer à l'aide de deux estimateurs différents. Pour n entier supérieur ou égal à 2, on considère à cet effet un échantillon $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ de n variables aléatoires indépendantes suivant toutes la même loi que X.

4. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $Y_n = \dfrac{4}{3n} \displaystyle\sum_{k=1}^{n} X_k$.

   a) Calculer $E(Y_n)$. En déduire que Y_n est un estimateur sans biais de a.

   b) On note $r_a(Y_n)$ le risque quadratique de l'estimateur Y_n.

   Montrer que l'on a : $r_a(Y_n) = \dfrac{a^2}{15\,n}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_a(Y_n)$.

   c) À l'aide de l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev, montrer que : $\forall \varepsilon > 0,\ \displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\big([\,|Y_n - a| \geqslant \varepsilon]\big) = 0$.

5. Pour tout entier $n \geqslant 2$, on pose : $Z_n = \max(X_1, X_2, \ldots, X_n)$.

   On admet que pour tout x réel, on a : $[Z_n \leqslant x] = [X_1 \leqslant x] \cap [X_2 \leqslant x] \cap \ldots \cap [X_n \leqslant x]$.

   a) On note H_n la fonction de répartition de Z_n. Montrer que : $H_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0 \\ \left(\dfrac{x}{a}\right)^{3n} & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant a \\ 1 & \text{si } x > a \end{cases}$.

   b) En déduire une densité h_n de la variable aléatoire Z_n.

   c) Calculer $E(Z_n)$ et déterminer le biais $b_a(Z_n)$ de l'estimateur Z_n.

   d) Calculer le risque quadratique $r_a(Z_n)$ de l'estimateur Z_n et déterminer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} r_a(Z_n)$.

6. Soit θ un réel vérifiant $0 < \theta < a$.

   a) Justifier l'égalité d'événements suivante : $[\,|Z_n - a| \geqslant \theta\,] = [\,Z_n - a \geqslant \theta\,] \cup [\,Z_n - a \leqslant -\theta\,]$.

   b) En déduire la relation : $P\big([\,|Z_n - a| \geqslant \theta\,]\big) = 1 - H_n(a + \theta) + H_n(a - \theta)$.

   c) Établir l'égalité : $P\big([\,|Z_n - a| \geqslant \theta\,]\big) = \left(\dfrac{a - \theta}{a}\right)^{3n}$. Calculer $\displaystyle\lim_{n \to +\infty} P\big([\,|Z_n - a| \geqslant \theta\,]\big)$.

EXERCICE 4

Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0.

À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{2}$;
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$;
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\dfrac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts ;
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts ;
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts ;
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1. Calculer $E(A_1)$ et $V(A_1)$.

2.a) Justifier que $A_2(\Omega) = [\![2,6]\!]$. Montrer que la loi de A_2 est donnée par :

$$P([A_2=2]) = \frac{1}{4},\ P([A_2=3]) = \frac{1}{4},\ P([A_2=4]) = \frac{5}{16},\ P([A_2=5]) = \frac{1}{8},\ P([A_2=6]) = \frac{1}{16}\cdot$$

b) Calculer $E(A_2)$.

3.a) Présenter dans un tableau la loi du couple (A_2, Z_2). En déduire la loi de Z_2 ainsi que l'espérance de Z_2.

b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}(A_2, Z_2)$ de A_2 et Z_2. Les variables aléatoires A_2 et Z_2 sont-elles indépendantes ?

4. On rappelle qu'en *Scilab*, l'instruction `grand(1,1,'uin',1,4)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1,4]\!]$.

Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
A=zeros(1,100)
for k=1:100
    t=grand(1,1,'uin',1,4)
    if t<= ...... then A(k)=1
    end
    if t== ...... then A(k)=2
    end
    if t== ...... then A(k)=3
    end
end
disp(A)
```

5. Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n. Justifier que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \frac{3}{4}\right)\cdot$

6.a) Justifier la relation : $X_n + Y_n + Z_n = n$. Calculer $\mathrm{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$.

b) En utilisant les valeurs de $V(X_n)$, $V(Y_n)$ et $V(X_n+Y_n)$, montrer que $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = -\frac{n}{8}\cdot$

c) Calculer le cœfficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n.

7.a) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n. Montrer que $E(A_n) = \frac{7n}{4}\cdot$

b) Exprimer A_n en fonction de X_n et Y_n. Calculer $V(A_n)$ et $\mathrm{Cov}(A_n, X_n)$.

8. On rappelle que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de même taille, la commande `plot2d(x,y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.

On complète le programme *Scilab* de la question 4 en y ajoutant les trois commandes suivantes :

```
x=1:100
y=cumsum(A)
plot2d(x,y)
```

Quelle sortie graphique obtient-on ?

IMPRIMERIE NATIONALE – 16 1170 – D'après documents fournis