ECRICOME

CONCOURS D'ADMISSION 2016

prépa

3

Mathématiques

Option Technologique

Mercredi 20 avril 2016 de 8h00 à 12h00

Durée : 4 heures

Candidats bénéficiant de la mesure « Tiers-temps » :
8h00 – 13h20

L'énoncé comporte 4 pages.

CONSIGNES

Aucun document n'est permis, aucun instrument de calcul n'est autorisé.
Conformément au règlement du concours, l'usage d'appareils communiquants ou connectés est formellement interdit durant l'épreuve.

Les candidats sont invités à soigner la présentation de leur copie, à mettre en évidence les principaux résultats, à respecter les notations de l'énoncé et à donner des démonstrations complètes – mais brèves – de leurs affirmations.

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Ce document est la propriété d'ECRICOME, vous devez le restituer aux examinateurs à la fin de la session ou le laisser sur table selon la consigne donnée dans votre centre d'écrits.

Tournez la page s.v.p.

EXERCICE 1

On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix}$ et $C = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On définit également trois suites (u_n), (v_n) et (w_n) par leurs premiers termes $u_0 = v_0 = w_0 = 0$ et les relations de récurrence :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} & = 4u_n - 3v_n - 2w_n + 1 \\ v_{n+1} & = 2u_n - v_n - 2w_n + 2 \\ w_{n+1} & = -u_n + v_n + 3w_n - 3 \end{cases}$$

1. *Puissances successives de la matrice A*
   (a) Calculer $(A - I)(A - 2I)(A - 3I)$. En déduire les valeurs propres possibles de la matrice A.
   (b) Vérifier que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ est obtenue en juxtaposant trois vecteurs-colonnes qui sont vecteurs propres de A. Préciser pour chacun la valeur propre correspondante.
   (c) Montrer que P est inversible et calculer P^{-1}.
   (d) Vérifier que la matrice diagonale $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ satisfait la relation $AP = PD$ et en déduire l'expression de A en fonction des matrices P, D et P^{-1}.
   (e) Exprimer A^n en fonction de P, P^{-1} et D^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
   (f) Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. *Obtention de l'expression des termes des trois suites récurrentes*
   (a) Vérifier que l'on a la relation : $C = AC + B$.
   (b) On pose, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Vérifier que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n + B$.
   (c) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $X_n = C - A^n C$.
   (d) En déduire les expressions de u_n, v_n, w_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de fonction

Soit g la fonction définie pour tout réel x par $g(x) = (x^3 + x^2 - x - 1)e^{-x}$. On désigne par $\mathcal{C}$ la courbe représentative de g dans un repère du plan.

1. Soit P le polynôme de degré deux, défini pour tout réel x par $P(x) = x^2 - 2x - 3$.
   Déterminer le signe de $P(x)$ suivant les valeurs de x.
2. Déterminer les limites de g en $-\infty$ et en $+\infty$.
3. (a) Montrer que $g'(x) = -xP(x)e^{-x}$ pour tout réel x.
   (b) Dresser le tableau de variation complet de g.
   (c) Calculer $g(1)$ et en déduire le signe de g sur $\mathbb{R}$.
4. Donner une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
5. Construire $\mathcal{C}$ ainsi que ses tangentes horizontales dans un repère orthogonal d'unités : 1cm sur (Ox) et 2cm sur (Oy). On prendra $\dfrac{32}{e^3} \simeq 1,6$.

Partie II : Intégrales et probabilités

1. On pose $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ et pour tout entier naturel non nul, $I_n = \displaystyle\int_1^{+\infty} x^n e^{-x}dx$.
   (a) Montrer que I_0 est une intégrale convergente égale à $\dfrac{1}{e}$.
   (b) A l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel $M \geqslant 0$:
   $$\int_1^M x^{n+1}e^{-x}dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x}dx$$
   (c) En raisonnant par récurrence à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel n, l'intégrale I_n converge.
   (d) Montrer que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,
   $$I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$$
   (e) Calculer I_n pour $n \in \{1, 2, 3\}$. On admet que $I_4 = \dfrac{65}{e}$, $I_5 = \dfrac{326}{e}$.
   (f) Écrire un script Scilab qui, demandant à l'utilisateur un entier strictement positif `n`, calcule et affiche la valeur de I_n.
2. Soit f la fonction définie par $\begin{cases} f(x) = 0 & \text{si } x < 1 \\ f(x) = \dfrac{e}{18}g(x) & \text{si } x \geqslant 1 \end{cases}$, où g est la fonction définie dans la partie I.
   (a) Montrer que f est une densité de probabilité d'une variable aléatoire que l'on notera Z.
   (b) Justifier que la variable Z admet une espérance, puis la calculer.
   (c) Justifier que la variable Z admet une variance, puis vérifier que :
   $$V(Z) = \frac{296}{81}$$

EXERCICE 3

Une urne contient six boules indiscernables au toucher : deux boules sont bleues, deux boules sont rouges, deux boules sont jaunes. On effectue une succession de tirages de deux boules successivement et sans remise dans cette urne selon le protocole suivant :

- si les deux boules sont de la même couleur, elles sont définitivement sorties de l'urne,
- si les deux boules sont de couleurs différentes, elles sont remises dans l'urne avant le tirage suivant.

On note Y_1 la variable aléatoire égale au nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une première paire de boules de la même couleur.
On note Y_2 (respectivement Y_3) le nombre de tirages (de deux boules) nécessaires pour obtenir une deuxième (respectivement une troisième) paire de boules de la même couleur, à partir de l'obtention de la première (respectivement de la deuxième) paire de boules de la même couleur.
On remarquera que Y_3 est une variable aléatoire constante et que $Y_3 = 1$.
On admettra que les variables Y_1, Y_2, Y_3 sont indépendantes.
Enfin, on note X la variable aléatoire égale au nombre de tirages nécessaires pour vider complètement l'urne.
Par exemple, si les résultats successifs sont $(R_1, B_1), (B_1, J_2), (J_1, J_2), (B_1, R_2), (R_1, B_2), (R_1, R_2), (B_1, B_2)$ alors Y_1 prend la valeur 3, Y_2 prend la valeur 3, Y_3 prend la valeur 1 et X prend la valeur 7.

1. *Loi de Y_1*
   (a) Calculer la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur lors du premier tirage (de deux boules).
   (b) Justifier que la variable aléatoire Y_1 suit une loi usuelle. De quel(s) paramètre(s) ?
   Vérifier que $E(Y_1) = 5$. Que vaut la variance de Y_1 ?

Tournez la page s.v.p.

2. *Loi de Y_2*
Dans cette question, on suppose que la première paire de boules de la même couleur a été obtenue et retirée de l'urne. Il reste ainsi quatre boules dans l'urne, deux pour chaque couleur restante.
   (a) Quelle est la probabilité d'obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage (de deux boules) ?
   (b) Déterminer la loi de Y_2. Quelle est son espérance ?
   Vérifier que $V(Y_2) = 6$.
3. *Loi de X*
   (a) Quelle relation lie la variable aléatoire X aux variables aléatoires Y_1, Y_2, Y_3 ?
   (b) En déduire que $E(X) = 9$. Que vaut $V(X)$?
   (c) Soit k un entier supérieur ou égal à 3. Justifier chaque égalité ci-dessous :

$$P(X = k) = P(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} P(Y_1 = i)P(Y_2 = k - 1 - i)$$

   Indication : On remarquera que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

   (d) En déduire que :

$$\forall k \geqslant 3, \quad P(X = k) = \frac{1}{2}\left[\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right]$$

4. *Informatique*
   (a) Compléter ce script SCILAB afin qu'il calcule et affiche les probabilités $P(X = k)$ pour $k \in [\![3, 22]\!]$.

```
for k = 3 : 22
        u(k) = .......................
end
plot(u, '+')
```

   Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 1 (page suivante).
   Quelle semble être la valeur la plus probable de X ?
   (b) Quelle instruction peut-on écrire dans la Console SCILAB qui affiche les vingt valeurs de la fonction de répartition de X aux points d'abscisses entières comprises entre 3 et 22.

   Le graphique obtenu en sortie est présent sur la figure 2 (page suivante).
   Déterminer graphiquement un réel m tel que $P(X \leqslant m) = P(X \geqslant m)$.

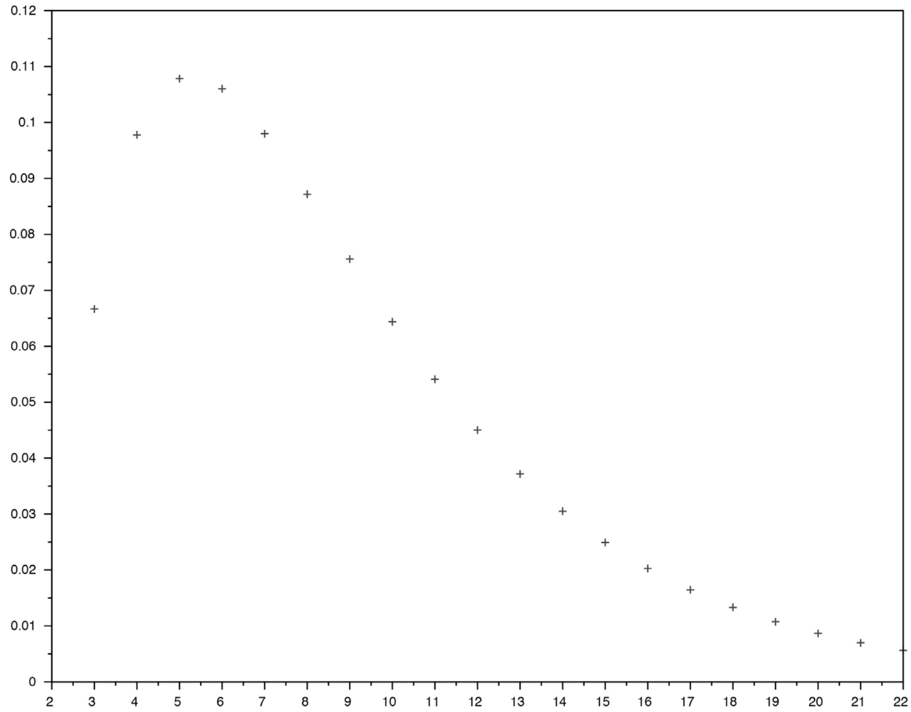

Figure 1

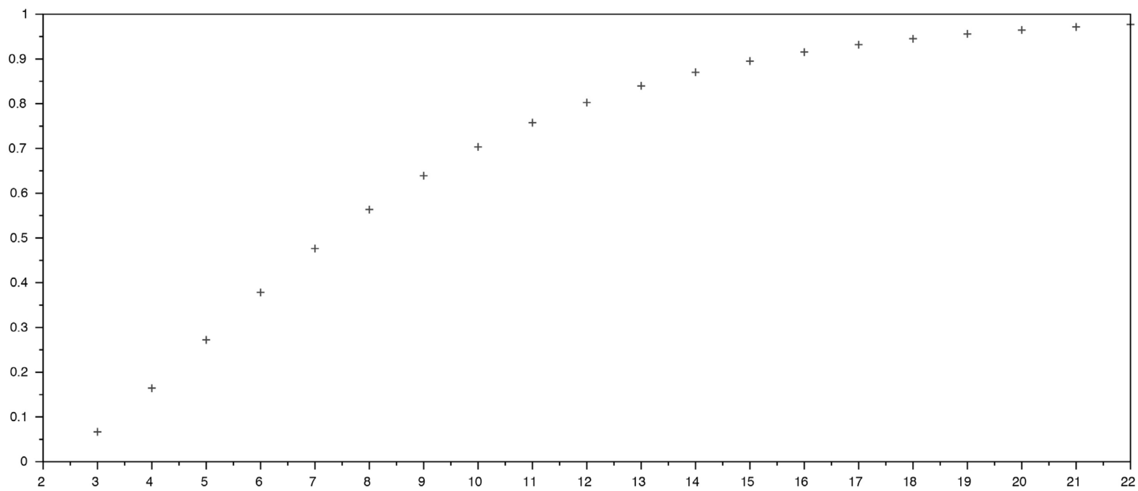

Figure 2