CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

CORRIGÉ

EXERCICE 1

1. (a) On obtient comme calculs :

$$(A-I)(A-2I)=\begin{pmatrix} 2 & -2 & -2 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{ou} \quad (A-2I)(A-3I)=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

puis $(A-I)(A-2I)(A-3I)=0$.
Puisque le polynôme $P(X)=(X-1)(X-2)(X-3)$ est annulateur de A, les valeurs propres possibles de A sont parmi les racines de ce polynôme, ainsi : $Sp(A)\subset\{1,2,3\}$.

(b) • $A\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 1.

• $A\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 2.

• $A\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\3\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$, donc $\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}$ est un vecteur propre de A pour la valeur propre 3.

(c) On trouve $P^{-1}=\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

(d) On a $AP=PD$, donc $A=PDP^{-1}$.

(e) Montrons par récurrence que : pour tout $n\in\mathbb{N}$, $A^n=PD^nP^{-1}$.
On note pour tout entier n : $\mathcal{P}(n)$: « $A^n=PD^nP^{-1}$ ».
- Pour $n=0$ on a $A^0=I$ et $P\times D^0P^{-1}=P\times P^{-1}=I$. Ainsi $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n\geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors : $A^{n+1}=A^n\times A=(PD^nP^{-1})(PDP^{-1})=PD^{n+1}P^{-1}$, et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, on a donc bien démontré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ A^n=PD^nP^{-1}$.

(f) On en déduit que :

$$A^n=\begin{pmatrix} -1+2^n+3^n & 2-2^n-3^n & 1-3^n \\ -1+3^n & 2-3^n & 1-3^n \\ 2^n-3^n & -2^n+3^n & 3^n \end{pmatrix}$$

2. (a) On calcule: $AC+B=C$.

(b) On écrit le système matriciellement :

$$X_{n+1}=\begin{pmatrix}u_{n+1}\\v_{n+1}\\w_{n+1}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 2 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}u_n\\v_n\\w_n\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\-3\end{pmatrix}=AX_n+B$$

(c) Notons pour tout $n\in\mathbb{N}$: $\mathcal{P}(n)$: « $X_n=C-A^nC$ ».
- Pour $n=0$, on a $C-A^0C=C-C=0$ et $X_0=0$, donc $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n\geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors :

$$X_{n+1}=AX_n+B=A(C-A^nC)+B=(AC+B)-A^{n+1}C=C-A^{n+1}C$$

et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.
- Par récurrence, on a donc bien démontré que : $\forall n\in\mathbb{N},\ X_n=C-A^nC$.

(d) On en déduit donc que pour $n\in\mathbb{N}$, $X_n=\begin{pmatrix}3^n-2^n\\3^n-1\\2-2^n-3^n\end{pmatrix}$.

EXERCICE 2

Partie I : Etude de fonction

1. Le discriminant de P vaut $\Delta = 16$, donc P admet deux racines qui sont -1 et 3. On en déduit que $P(x)$ est positif lorsque $x \leqslant -1$ ou $x \geqslant 3$, et que $P(x)$ est négatif lorsque $-1 \leqslant x \leqslant 3$.
2. En $-\infty$, on a : $\lim\limits_{x\to-\infty} (x^3+x^2-x-1) = \lim\limits_{x\to-\infty} (x^3) = -\infty$ et par ailleurs $\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = +\infty$, donc par produit :
$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = -\infty$$
En $+\infty$, on a :
$$g(x) = \frac{x^3}{e^x} + \frac{x^2}{e^x} - \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$$
et par croissances comparées, on en déduit que :
$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$$
3. (a) La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a pour tout réel x,
$$g'(x) = (3x^2+2x-1)e^{-x} + (x^3+x^2-x-1)(-e^{-x}) = \left(-x^3+2x^2+3x\right)e^{-x} = -x(x^2-2x-3)e^{-x}$$
(b) On sait que $e^{-x} > 0$ pour tout réel x, donc on a :

x	$-\infty$		-1		0		3		$+\infty$
$-x$		$+$		$+$	0	$-$		$-$	
$P(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$32e^{-3}$	$\searrow$	0

(c) On obtient que $g(1) = 0$. D'après le tableau de variations, on en déduit que :
$$g(x) \leqslant 0 \quad \text{si } x \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad g(x) \geqslant 0 \quad \text{si } x \geqslant 1$$
4. La tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1 a pour équation :
$$y = g'(1)(x-1) + g(1) = 4e^{-1}(x-1) + 0 = 4e^{-1}x - 4e^{-1}$$
5.

Partie II : Intégrales et probabilités

1. (a) La fonction $x \mapsto e^{-x}$ est continue sur $[1, +\infty[$ et pour tout $A > 1$, on a :
$$\int_1^A e^{-x}dx = \Big[-e^{-x}\Big]_1^A = e^{-1} - e^{-A} \underset{A\to+\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{e}$$
Ainsi, l'intégrale $I_0 = \displaystyle\int_1^{+\infty} e^{-x}dx$ converge et vaut $1/e$.

(b) Soit $M \geqslant 0$. On pose pour tout $x \in [1, M]$:

$$\left| \begin{array}{l} u(x) = x^{n+1} \\ v'(x) = e^{-x} \end{array} \right. \qquad \left| \begin{array}{l} u'(x) = (n+1)x^n \\ v(x) = -e^{-x} \end{array} \right.$$

Par intégration par parties, on obtient que :

$$\begin{aligned} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx &= \Big[-e^{-x} x^{n+1} \Big]_1^M - \int_1^M (n+1)x^n (-e^{-x}) dx \\ &= -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1) x^n e^{-x} dx \end{aligned}$$

(c) On note pour tout entier n : $\mathcal{P}(n)$: « l'intégrale I_n converge ».

- On a démontré que $\mathcal{P}(0)$ est vraie.
- Pour $n \geqslant 0$, supposons $\mathcal{P}(n)$ vraie. Alors, en reprenant la formule démontrée à la question précédente, en faisant tendre M vers $+\infty$, par croissances comparées, on obtient que :

$$\lim_{M \to +\infty} \int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -0 + \frac{1}{e} + (n+1) \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx = \frac{1}{e} + (n+1) I_n$$

Ainsi, l'intégrale $I_{n+1} = \int_1^{+\infty} x^{n+1} e^{-x} dx$ converge et donc $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie.

- Par récurrence, on a donc bien démontré que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \; I_n \text{ converge}$$

(d) (Montré à la question précédente).

(e)
- $I_1 = \dfrac{1}{e} + 1 \times I_0 = \dfrac{2}{e}$.
- $I_2 = \dfrac{1}{e} + 2 \times I_1 = \dfrac{5}{e}$.
- $I_3 = \dfrac{1}{e} + 3 \times I_2 = \dfrac{16}{e}$.

(f)

```
n = input("Donner un entier strictement positif")
    u = 1/(exp(1))
for k = 1:n
    u = 1/(exp(1))+k*u;
end;
disp(u);
```

2. (a) La fonction f est positive (car nulle sur $]-\infty, 1[$ et g est positive sur $[1, +\infty[$), et continue au moins sur $\mathbb{R}$ (elle est nulle sur $]-\infty, 1[$, on a $g(1) = 0$ et g est continue sur $[1, +\infty[$). De plus,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx &= \frac{e}{18} \int_1^{+\infty} (x^3 + x^2 - x - 1) e^{-x} dx \\ &= \frac{e}{18}(I_3 + I_2 - I_1 - I_0) = \frac{e}{18} \times \frac{18}{e} = 1 \end{aligned}$$

Ainsi, f est bien une densité de probabilité.

(b) La variable Z admet une espérance si l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} x f(x) dx$ converge. Or, ici :

$$\int_1^{+\infty} x f(x) dx = \frac{e}{18} \int_1^{+\infty} (x^4 + x^3 - x^2 - x) e^{-x} dx = \frac{e}{18}(I_4 + I_3 - I_2 - I_1) = \frac{e}{18} \times \frac{74}{e} = \frac{37}{9}$$

Donc Z admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}[Z] = \dfrac{37}{9}$.

CONCOURS ECRICOME PREPA
APRÈS CLASSE PRÉPARATOIRE

(c) La variable Z^2 admet une espérance si l'intégrale $\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx$ converge. Or, ici :

$$\int_1^{+\infty} x^2 f(x)dx = \frac{e}{18}\int_1^{+\infty}(x^5+x^4-x^3-x^2)e^{-x}dx = \frac{e}{18}(I_5+I_4-I_3-I_2) = \frac{e}{18}\times\frac{370}{e} = \frac{185}{9}$$

Donc Z^2 admet une espérance qui vaut $\mathbb{E}[Z^2] = \frac{185}{9}$ et donc Z admet une variance qui vaut :

$$\mathbb{V}[Z] = \frac{185}{9} - \left(\frac{37}{9}\right)^2 = \frac{296}{81}$$

EXERCICE 3

1. (a) Notons A l'événement « on obtient une paire de boules de la même couleur lors des deux premiers tirages ».
En fait cela revient à, une fois que la première boule (quelconque) a été tirée, de choisir dans l'urne restante (avec 5 boules) l'unique boule qui est de la même couleur, on a donc :

$$\mathbb{P}(A) = \frac{1}{5}$$

(b) On a ici une succession d'épreuves succès/échec (le succès étant d'obtenir deux boules de la même couleur), les épreuves se répétant dans des conditions identiques et indépendantes et Y_1 désigne le rang d'apparition du premier succès, donc Y_1 suit une loi géométrique, de paramètre $1/5$. On a donc en particulier $\mathbb{E}(Y_1) = \frac{1}{\frac{1}{5}} = 5$ et $\mathbb{V}(Y_1) = \frac{1-\frac{1}{5}}{(\frac{1}{5})^2} = 20$.

2. (a) Notons B l'événement « obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage ».
Obtenir une paire de boules de la même couleur en un seul tirage, revient à, lors de la deuxième boule à piocher (parmi les 3 dans l'urne) de piocher exactement celle qui a la même couleur que celle tirée lors de la première pioche :

$$\mathbb{P}(B) = \frac{1}{3}$$

(b) On a ici encore une succession d'épreuves succès/échec (le succès étant d'obtenir deux boules de la même couleur), les épreuves se répétant dans des conditions identiques et indépendantes et Y_2 désigne le rang d'apparition du premier succès, donc Y_2 suit une loi géométrique, de paramètre $1/3$. On a donc en particulier $\mathbb{E}(Y_2) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3$ et $\mathbb{V}(Y_2) = \frac{1-\frac{1}{3}}{(\frac{1}{3})^2} = 6$.

3. (a) On a :

$$X = Y_1 + Y_2 + Y_3$$

(b) Par linéarité de l'espérance, on a :

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y_1) + \mathbb{E}(Y_2) + \mathbb{E}(Y_3) = 5+3+1 = 9$$

Puisque les variables Y_1, Y_2 et Y_3 sont indépendantes, on a :

$$\mathbb{V}(X) = \mathbb{V}(Y_1) + \mathbb{V}(Y_2) + \mathbb{V}(Y_3) = 20+6+0 = 26$$

(c) Puisque $X = Y_1 + Y_2 + Y_3$ et que $Y_3 = 1$, on a :

$$[X = k] = [Y_1 + Y_2 + 1 = k] = [Y_1 + Y_2 = k - 1]$$

donc en passant aux probabilités :

$$\mathbb{P}(X = k) = \mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1)$$

De plus, puisqu'on nous fait remarquer que :

$$[Y_1 + Y_2 = k - 1] = \bigcup_{i=1}^{k-2} ([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

les événements étant incompatibles, on a :

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}([Y_1 = i] \cap [Y_2 = k - 1 - i])$$

et enfin les variables Y_1 et Y_2 étant indépendantes :

$$\mathbb{P}(Y_1 + Y_2 = k - 1) = \sum_{i=1}^{k-2} \mathbb{P}(Y_1 = i)\mathbb{P}(Y_2 = k - 1 - i)$$

(d) Puisque Y_1 et Y_2 suivent des lois géométriques, on en déduit que :

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(X = k) &= \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^{i-1} \left(\frac{1}{5}\right) \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1-i-1} \left(\frac{1}{3}\right) \\
&= \frac{1}{15} \times \frac{5}{4} \times \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \sum_{i=1}^{k-2} \left(\frac{4}{5}\right)^{i} \left(\frac{3}{2}\right)^{i} \\
&= \frac{1}{12} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \times \frac{6}{5} \times \frac{1 - \left(\frac{6}{5}\right)^{k-2}}{1 - \frac{6}{5}} \\
&= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2} \left(\left(\frac{6}{5}\right)^{k-2} - 1\right) \\
&= \frac{1}{2} \left[\left(\frac{4}{5}\right)^{k-2} - \left(\frac{2}{3}\right)^{k-2}\right]
\end{aligned}$$

4. *Informatique*

(a)

```
for k = 3 : 22
        u(k) = 1/2*((4/5)^(k-2)-(2/3)^(k-2))
end
plot(u, '+')
```

D'après le graphique, la valeur la plus probable de X semble être 5.

(b) Il s'agit d'utiliser la fonction `cumsum`. Graphiquement, il semblerait que pour $m = 7$, on ait $P(X \leqslant 7) \simeq 0.5 \simeq P(X \geqslant 7)$.