NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 16

Exercice 1 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $I_1 = \displaystyle\int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x$

Solution : Je sais primitiver directement la fonction sous l'intégrale :

$$I_1 = \int_0^1 e^{2x} - e^{-3x}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}e^{2x} + \frac{1}{3}e^{-3x}\right]_0^1 = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{2}e^2 + \frac{1}{3}e^{-3} - \frac{5}{6}.$$

2. $I_2 = \displaystyle\int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x$

Solution : Je sais primitiver directement la fonction sous l'intégrale :

$$I_2 = \int_{-1}^1 x^2 - 2x + 1\,\mathrm{d}x = \left[\frac{x^3}{3} - x^2 + x\right]_{-1}^1 = \left(\frac{1}{3} - 1 + 1\right) - \left(-\frac{1}{3} - 1 - 1\right) = \frac{1}{3} - 1 + 1 + \frac{1}{3} + 1 + 1 = \frac{8}{3}.$$

3. $I_3 = \displaystyle\int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x$

Solution : Je pose $f_3(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$. f_3 semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$, avec $u(x) = 1 + x^2$.
Puisque $u'(x) = 2x$, alors $\dfrac{u'(x)}{u(x)} = \dfrac{2x}{1+x^2} = 2f_3(x)$.
Ainsi une primitive de f_3 est donnée par $F_3(x) = \dfrac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)$. Donc

$$I_3 = \int_1^3 \frac{x}{1+x^2}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_1^3 = \frac{1}{2}\ln(10) - \frac{1}{2}\ln(2) = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{10}{2}\right) = \frac{1}{2}\ln(5).$$

4. $I_4 = \displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t$

Solution : Je pose $f_4(t) = \dfrac{t}{\sqrt{1+t^2}}$. f_4 semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(t) = 1 + t^2$.
Puisque $u'(t) = 2t$, alors $\dfrac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \dfrac{2t}{\sqrt{1+t^2}} = 2f_4(t)$.
Ainsi une primitive de f_4 est donnée par $F_4(t) = \dfrac{1}{2} \times 2\sqrt{1+t^2} = \sqrt{1+t^2}$. Donc

$$I_4 = \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{1+t^2}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$$

Exercice 2 –

1. Calculer pour tout réel A strictement supérieur à 1, l'intégrale $I_A = \int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$.

Solution : Je sais primitiver directement la fonction sous l'intégrale :

$$I_A = \int_1^A \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = \left[3 \times \left(-\frac{1}{3x^3}\right)\right]_1^A = \left[-\frac{1}{x^3}\right]_1^A = -\frac{1}{A^3} + \frac{1}{1^3} = 1 - \frac{1}{A^3}.$$

2. Calculer $\lim\limits_{A\to+\infty} I_A$.

Solution : Lorsque A tend vers $+\infty$, $\lim\limits_{A\to+\infty} \frac{1}{A^3} = 0$. Donc

$$\lim_{A\to+\infty} I_A = \lim_{A\to+\infty} 1 - \frac{1}{A^3} = 1 - 0 = 1.$$

3. Que peut-on en déduire ?

Solution : J'en déduis que l'intégrale impropre $\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x$ converge et vaut

$$\int_1^{+\infty} \frac{3}{x^4}\,\mathrm{d}x = 1.$$