Concours Blanc 4 — ECRICOME

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 6 pages et est constitué de 3 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

Partie 1

On considère la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ définie par $\begin{cases} u_1 \in [0,1], \\ \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = \dfrac{5}{12}u_n + \dfrac{1}{3}. \end{cases}$

1. Compléter la fonction en langage `Python` suivante, qui prend en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `u1` de $[0,1]$ correspondant au terme initial u_1 de la suite, et renvoie le terme u_n.

```
import numpy as np

def suite(n,u1):
    u=u1
    for k in range(...):
        u=......
    return u
```

2. a) Résoudre, pour $x \in \mathbb{R}$, l'équation $x = \dfrac{5}{12}x + \dfrac{1}{3}$. Notons ℓ la solution.
   b) On définit la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ par $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n = u_n - \ell$.
   Démontrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   c) Donner l'expression du terme général de $(v_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de n et de v_1.
   d) En déduire celle du terme général de $(u_n)_{n\geqslant 1}$ en fonction de n et de u_1.

Partie 2

On considère les matrices : $A = \begin{pmatrix} 9 & 4 \\ 3 & 8 \end{pmatrix}$, $D = \begin{pmatrix} 12 & 0 \\ 0 & 5 \end{pmatrix}$, $P = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \dfrac{1}{7}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$.

3. On note $X_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer AX_1 et AX_2.
   b) En déduire que 12 et 5 sont des valeurs propres de A et donner des vecteurs propres associés.

4. Montrer que P est inversible et donner son inverse. *(On vérifiera que $P^{-1} = Q$.)*
5. Vérifier que $A = PDP^{-1}$.
6. Démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nP^{-1}$.
7. Soit $X = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $P^{-1}X$.
   b) En déduire l'expression de A^nX pour tout entier naturel n.

Partie 3

Un client d'une agence de voyages cherche à prévoir ses vacances au soleil pour l'hiver (entre décembre et février) et à éviter la pluie. Sur la destination souhaitée, on suppose que soit il pleut, soit il fait beau. On sait de plus que, pour $n \in \mathbb{N}^*$:

- S'il fait beau un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{3}{4}$.
- S'il pleut un certain jour n, la probabilité qu'il fasse beau le lendemain est $\frac{1}{3}$.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note :

- A_n l'événement : "Il fait beau le jour n", et a_n la probabilité $P(A_n)$.
- B_n l'événement : "Il pleut le jour n", et b_n la probabilité $P(B_n)$.

On suppose que le jour 1, à savoir le 1^{er} décembre, il fait beau. Donc $a_1 = P(A_1) = 1$.

8. Déterminer b_1, a_2, b_2.
9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.
   a) Montrer que $P(A_{n+1}) = \frac{3}{4}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n)$ et que $P(B_{n+1}) = \frac{1}{4}P(A_n) + \frac{2}{3}P(B_n)$.
   b) En déduire que $\begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ où $M = \frac{1}{12}A$.
   c) Justifier que $a_n + b_n = 1$.
10. a) Montrer, par récurrence sur n, que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix} = M^{n-1} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.
    b) En déduire l'expression de a_n et de b_n en fonction de n.
11. On se propose, dans cette question, de trouver le terme général de $(a_n)_{n\geqslant 1}$ et de $(b_n)_{n\geqslant 1}$ d'une manière différente.
    a) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_{n+1} = \frac{5}{12}a_n + \frac{1}{3}$.
    b) En utilisant la **Partie 1**, démontrer que $\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = \frac{3}{7}\left(\frac{5}{12}\right)^{n-1} + \frac{4}{7}$.
    c) En déduire l'expression de b_n en fonction de n.
12. Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$.
13. Le client doit partir le 1^{er} décembre, pour un séjour de 10 jours (du 1^{er} décembre au 10 décembre).
    a) Quelle est la probabilité qu'il fasse beau durant les 9 premiers jours et qu'il pleuve le dernier jour ?
    b) Quelle est la probabilité que le voyageur reparte sous la pluie, c'est-à-dire qu'il pleuve le jour 10 ?

Exercice 2 –

Partie 1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^x\right)$.
On note $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1. Justifier que l'ensemble de définition de f est $\mathbb{R}$.
   On admet que f est continue et dérivable sur $\mathbb{R}$.
2. Vérifier que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$.
   En déduire la monotonie de f sur $\mathbb{R}$.
3. Calculer la limite de f en $-\infty$.
   $\mathcal{C}_f$ admet-elle une asymptote ? Si oui, donner l'équation de cette asymptote.
4. a) Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   b) Démontrer que $\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x + \ln\left(1+\mathrm{e}^{-x}\right)$.
   c) En déduire que la droite $(\mathcal{D})$ d'équation $y = x$ est asymptote à la courbe $\mathcal{C}_f$ en $+\infty$.
   d) Étudier le signe de $f(x) - x$ pour tout réel x, et en déduire la position relative de $(\mathcal{D})$ par rapport à $\mathcal{C}_f$.
5. Déterminer l'équation de la tangente $(\mathcal{T}_0)$ à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
6. a) Dresser le tableau de variation de f en précisant les limites aux bornes et la valeur en 0.
   b) Tracer sur un même repère l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$, les droites $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{T}_0)$.
   On admet qu'une valeur approchée de $\ln(2)$ *est* 0.69.

Partie 2

Pour tout entier naturel n, on pose pour tout réel x de $[0,1]$,

$$g_n(x) = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-nx}\right) \quad \text{et} \quad I_n = \int_0^1 g_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

7. a) Montrer que $\forall x \in [0,1], \forall n \in \mathbb{N}, \quad g_{n+1}(x) \leqslant g_n(x)$.
   b) En déduire que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   c) Montrer que la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
8. a) À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout entier naturel n,

$$I_n = \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\int_0^1 \frac{x\,\mathrm{e}^{-nx}}{1+\mathrm{e}^{-nx}}\,\mathrm{d}x.$$

   b) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant I_n \leqslant \ln\left(1+\mathrm{e}^{-n}\right) + n\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x$.
   c) Montrer que pour tout entier naturel n non nul, $\displaystyle\int_0^1 x\,\mathrm{e}^{-nx}\,\mathrm{d}x = \frac{-\mathrm{e}^{-n}}{n} + \frac{1-\mathrm{e}^{-n}}{n^2}$.
   d) En déduire que $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} I_n = 0$.

9. a) Écrire une fonction en langage `Python`, nommée `gn`, prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et un réel `x` et renvoyant $g_n(x)$.

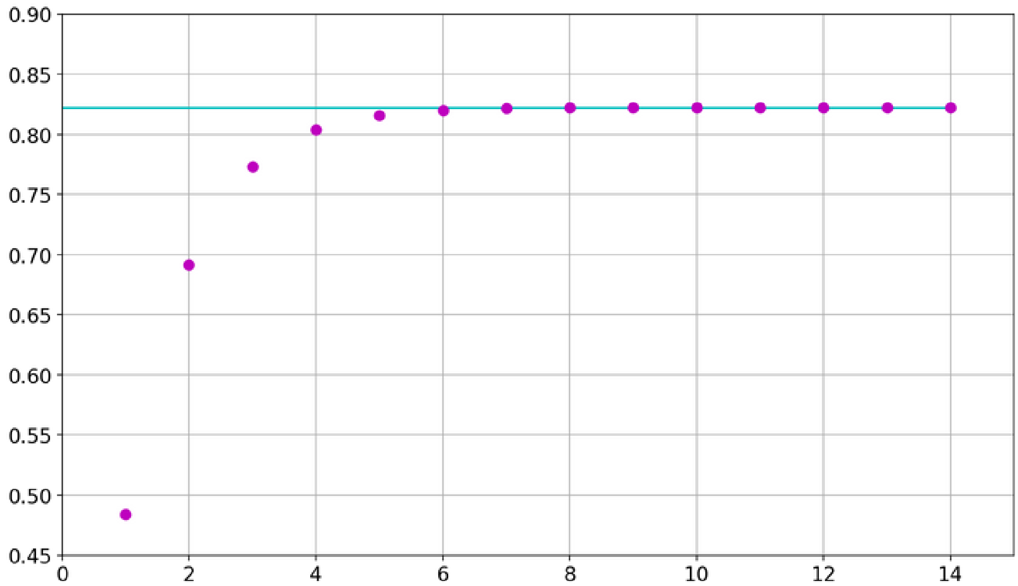
   b) On dispose d'une fonction en langage `Python` nommée `I` prenant en entrée un entier naturel non nul `n` et renvoyant une valeur approchée de I_n à 10^{-7} près.
   On exécute le code suivant :

```
import numpy as np
import matplotlib.pyplot as plt

L_x=np.zeros(14)
L_y=np.zeros(14)
for n in range(14):
    L_x[n]=n+1
    L_y[n]=(n+1)*I(n+1)

plt.plot(L_x,L_y,'.r')
plt.plot([1,14],[np.pi**2/12,np.pi**2/12])
plt.show()
```

   On obtient la figure ci-dessous :



   Que peut-on conjecturer sur la suite $(nI_n)_{n\geqslant 1}$?

Exercice 3 –

Soit s un réel strictement positif. On définit $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < s, \\ \dfrac{2s^2}{x^3} & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.

On modélise, pour un employé pris au hasard dans la population, le nombre S de SMIC (salaire minimum) que vaut son salaire. On note s le SMIC. Par définition, on a toujours $S \geqslant s$.
Si par exemple un employé gagne 2 SMIC, son salaire vaut $S = 2s$. On suppose que S est une variable aléatoire à densité, de densité f, où f est la fonction définie ci-dessus.

2. Montrer que la fonction de répartition de S est la fonction F définie par
$$\forall x \in \left]-\infty, s\right[, \quad F(x) = 0 \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left[s, +\infty\right[, \quad F(x) = 1 - \left(\frac{s}{x}\right)^2.$$
3. Dresser le tableau de variation de F sur $\left[s, +\infty\right[$ et représenter l'allure de sa courbe sur $\mathbb{R}$.
4. Soit G la fonction définie sur $\left[0,1\right[$ par $\forall y \in \left[0,1\right[, \quad G(y) = s\sqrt{\dfrac{1}{1-y}}$.
   a) Montrer que F est une bijection de $\left[s, +\infty\right[$ vers $\left[0,1\right[$.
   b) Montrer que $\forall y \in \left[0,1\right[, \quad G(y) \in \left[s, +\infty\right[$.
   c) Montrer que $\forall y \in \left[0,1\right[, \quad F\big(G(y)\big) = y$.
5. Soit U une variable aléatoire suivant une loi uniforme sur $\left[0,1\right[$ et V la variable aléatoire égale à $G(U)$.
   a) Rappeler la fonction de répartition d'une loi uniforme sur $\left[0,1\right[$.
   b) Montrer que
   $$\forall x \in \left[s, +\infty\right[, \quad P(V \leqslant x) = P\big(U \leqslant F(x)\big) = F(x) \qquad \text{et} \qquad \forall x \in \left]-\infty, s\right[, \quad P(V \leqslant x) = 0.$$
   c) En déduire que V est une variable aléatoire de même loi que S.
6. Compléter la fonction S suivante en langage `Python` qui prend en entrée le réel strictement positif s et qui renvoie une simulation de S. *On rappelle que la commande `rd.random()` renvoie un nombre aléatoire compris entre* 0 *et* 1 *selon une loi uniforme sur* $\left[0,1\right[$.

```
import numpy.random as rd

def S(s):
    U=rd.random()
    S=......
    return S
```

7. Démontrer que S admet une espérance et vérifier que $E(S) = 2s$.
8. S admet-elle une variance ?
9. Démontrer que la probabilité qu'un employé ait un salaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$ vaut $p = \dfrac{4}{9}$.

Dans la suite de l'exercice, on considère $S_1, S_2, \ldots, S_n$ n variables aléatoires indépendantes représentant le salaire de n salariés distincts.
On s'intéresse ici au nombre N_n de ces n salariés qui ont un salaire horaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$.
On admet que N_n est une variable aléatoire.

10. Déterminer la loi de N_n.
11. Calculer $E(N_n)$ et vérifier que $V(N_n) = \dfrac{20n}{81}$.
12. Déterminer, en fonction de n, la probabilité qu'au plus 2 employés parmi les n aient un salaire horaire d'au moins $\dfrac{3}{2}s$.

13. Notons $M_n = \dfrac{1}{2n}\left(S_1 + S_2 + \cdots + S_n\right)$.

   a) Déterminer l'espérance de M_n.

   b) On considère le programme suivant où `S` est la fonction en langage `Python` obtenue à la question **6.**.

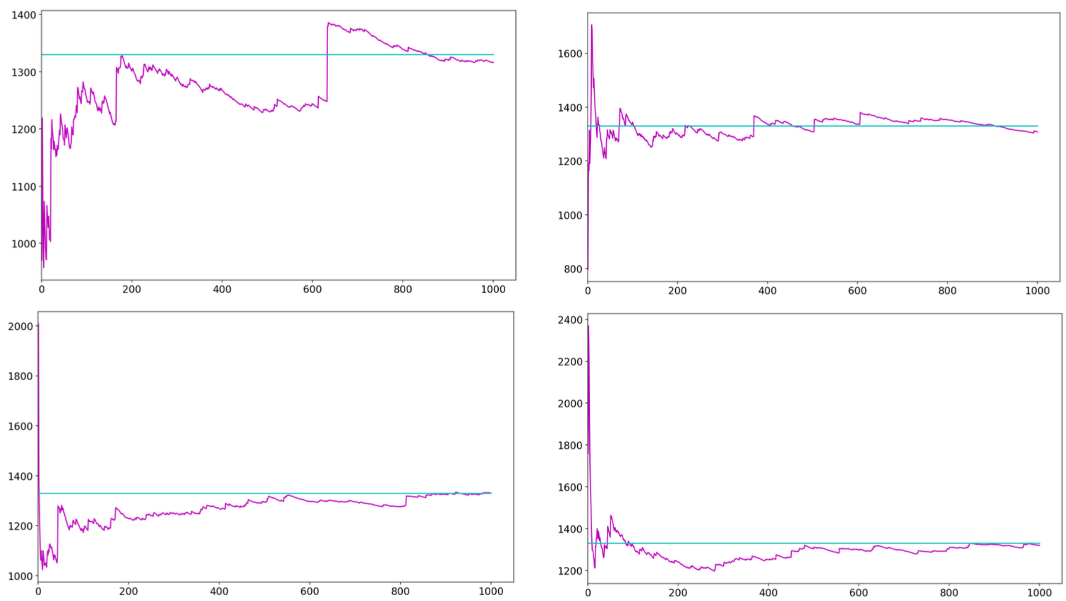
```
import numpy as np
import numpy.random as rd
import matplotlib.pyplot as plt

n=1000
s=1330
M=0
F=np.zeros(n)
X=np.zeros(n)
L=np.zeros(n)
for k in range(1,n+1):
    M=M+S(s)
    F[k-1]=1/(2*k)*M
    X[k-1]=k
    L[k-1]=s

plt.plot(X,F)
plt.plot(X,L)
plt.show()
```

   Que représente `F` ?

   c) On obtient les courbes suivantes :



   Justifier que les appels différents de ce programme donnent des courbes différentes. Que permet de conjecturer ces courbes sur le comportement des réalisations de M_n quand n tend vers $+\infty$?