CONCOURS BLANC 4 — BSB

Exercice 1 –

1. Je remplace x par -1 dans l'expression de $P(x)$:
$$P(-1) = (-1)^3 - (-1)^2 - (-1) + 1 = -1 - 1 + 1 + 1 = 0.$$
En effet, P s'annule bien en $x = -1$.

2. D'après la question précédente, -1 est une racine du polynôme P.
Ainsi $x - (-1) = x + 1$ est un diviseur de $P(x)$, c'est-à-dire qu'il existe un polynôme de degré $3 - 1 = 2$ tel que $P(x) = (x+1)\big(ax^2 + bx + c\big)$. Je développe ce produit :
$$(x+1)\big(ax^2+bx+c\big) = ax^3 + bx^2 + cx + ax^2 + bx + c = ax^3 + (b+a)x^2 + (c+b)x + c.$$
Par identification des coefficients, comme ce produit est égal au polynôme $P(x)$, alors
$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = -1 \\ c + b = -1 \\ c = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} a = 1 \\ b = -1 - 1 = -2 \\ c = -1 - (-2) = -1 + 2 = 1 \end{cases}$$
Ainsi une factorisation de $P(x)$ est donnée par
$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = (x+1)\big(x^2 - 2x + 1\big).$$

3. D'après la question **1.**, -1 est une racine de $P(x)$. Grâce à la question précédente, je cherche les racines de $x^2 - 2x + 1$. Je reconnais une identité remarquable :
$$x^2 - 2x + 1 = 0 \iff (x-1)^2 = 0 \iff x - 1 = 0 \iff x = 1.$$
Finalement $P(x)$ admet bien deux racines : -1 et 1.

4. Comme $P(x)$ est un polynôme, il me suffit d'étudier la limite du terme de plus haut degré :
$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = \lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = \lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$$

5. Pour étudier les variations de P, j'étudie le signe de sa dérivée. La fonction P est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P'(x) = 3x^2 - 2x - 1$.
Je calcule le discriminant : $\Delta = (-2)^2 - 4 \times 3 \times (-1) = 4 + 12 = 16 = 4^2 > 0$.
Donc $P(x)$ a deux racines :
$$x_1 = \frac{-(-2)+\sqrt{16}}{2\times 3} = \frac{2+4}{6} = \frac{6}{6} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{2-4}{6} = \frac{-2}{6} = -\frac{1}{3}.$$
Comme $a = 3 > 0$, j'en déduis le tableau de signe de $P'(x)$ et le tableau de variation de P :

x	$-\infty$		$-\frac{1}{3}$		1		$+\infty$
$P'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
P	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

avec $P\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 - \left(-\frac{1}{3}\right)^2 - \left(-\frac{1}{3}\right) + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} + 1 = \frac{-1-3+9+27}{27} = \frac{32}{27}.$

6. Un point d'inflexion représente un changement de convexité de la courbe : la dérivée seconde s'y annule et change de signe.
La fonction P' est dérivable comme fonction polynomiale et pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad P''(x) = 6x-2$.
Ainsi

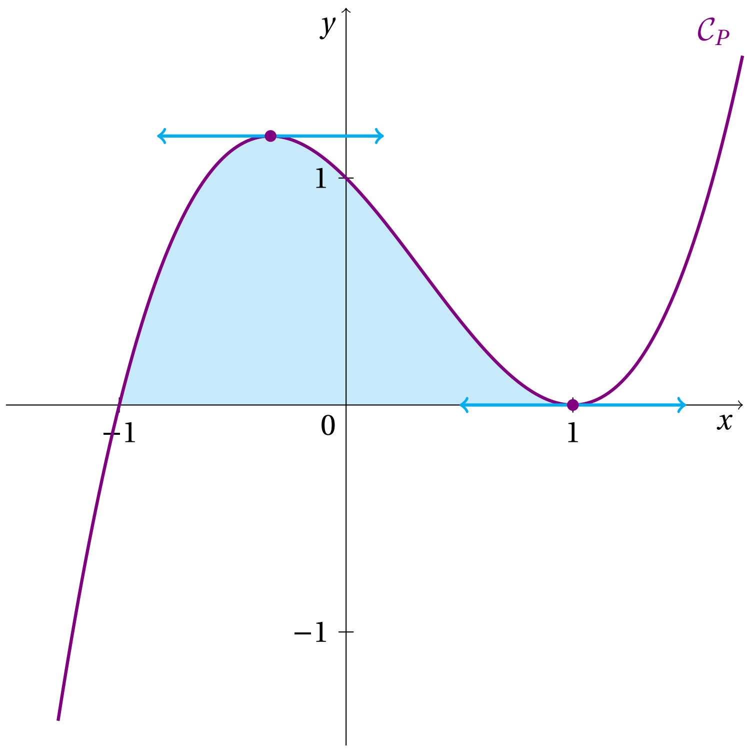
$$P''(x) = 0 \iff 6x-2=0 \iff 6x = 2 \iff 3x = 1 \iff x = \frac{1}{3}.$$

Et comme il s'agit d'une fonction affine, le signe change bien au voisinage de $x = \frac{1}{3}$. Le point d'abscisse $x = \frac{1}{3}$ est bien un point d'inflexion de la courbe représentative de la fonction P.

7. Pour calculer l'intégrale I, il me faut cette fois une primitive de la fonction P.
Comme il s'agit d'une fonction polynomiale, j'opère directement terme à terme :

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x = \int_{-1}^{1} \left(x^3 - x^2 - x + 1\right)\mathrm{d}x = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^3}{3} - \frac{x^2}{2} + x\right]_{-1}^{1} \\ &= \left(\frac{1^4}{4} - \frac{1^3}{3} - \frac{1^2}{2} + 1\right) - \left(\frac{(-1)^4}{4} - \frac{(-1)^3}{3} - \frac{(-1)^2}{2} + (-1)\right) \\ &= \frac{1}{4} - \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + 1 = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}. \end{aligned}$$

8. Les tangentes horizontales se situent aux points d'abscisses $-\frac{1}{3}$ et 1.
Voici le tracé de la courbe de P, avec en bleu l'aire de l'intégrale I :



9. Je remplace x par 0 dans l'expression de $f(x)$:

$$f(0) = \left(0^2 - 2\times 0 - 1\right)\mathrm{e}^0 = -1 \times 1 = -1.$$

L'image de 0 par f est -1.

10. Pour calculer les limites, je décompose le produit en deux facteurs :

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to+\infty} x^2-2x-1 = \lim_{x\to+\infty} x^2 &= +\infty\\ \lim_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x &= +\infty\end{aligned}\right\}\text{ Par produit, } \lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$

$$\left.\begin{aligned}\lim_{x\to-\infty} x^2-2x-1 = \lim_{x\to-\infty} x^2 &= +\infty\\ \lim_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x &= 0\end{aligned}\right\}\text{ Par croissances comparées, } \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

11. La fonction f est dérivable comme produit de deux fonctions dérivables.
f est de la forme $u\times v$, avec $u(x) = x^2-2x-1$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$.
Comme $u'(x) = 2x-2$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, alors

$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = (2x-2)\times\mathrm{e}^x + \left(x^2-2x-1\right)\times\mathrm{e}^x = \left(x^2-3\right)\mathrm{e}^x.$$

Alors comme l'exponentielle est toujours strictement positive,

$$\begin{aligned} f'(x) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x^2-3\right)\mathrm{e}^x = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2-3 = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad x^2 = 3\\ &\Longleftrightarrow \quad x = \sqrt{3} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{3}.\end{aligned}$$

12. Grâce aux informations précédentes, je peux dresser le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		$-\sqrt{3}$		0		$\sqrt{3}$		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	$f\left(-\sqrt{3}\right)$	$\searrow$	-1	$\searrow$	$f\left(\sqrt{3}\right)$	$\nearrow$	$+\infty$

13. Grâce au tableau de variation, je sais que la fonction f est croissante sur $\left]-\infty,-\sqrt{3}\right]$ et que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = 0$. Alors j'en déduis que $f\left(-\sqrt{3}\right)$ est positif.
De même, comme la fonction f est décroissante sur $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ et que $f(0) = -1 < 0$.
Alors j'en déduis que $f\left(\sqrt{3}\right)$ est négatif.

14. a) D'après le théorème des valeurs intermédiaires, comme la fonction f est continue et strictement décroissante sur l'intervalle $\left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ et que $f\left(-\sqrt{3}\right) > 0 > f\left(\sqrt{3}\right)$, alors 0 est une valeur intermédiaire et donc il existe un réel $\alpha \in \left[-\sqrt{3},\sqrt{3}\right]$ tel que $f(\alpha) = 0$.
Ce réel est unique par stricte monotonie de la fonction f.
b) Comme $f(0) = -1 < 0$, alors $f\left(-\sqrt{3}\right) > f(\alpha) > f(0)$, et par décroissance de f, j'en déduis bien que α est strictement négatif.

15. L'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 est $y = f'(-1)\times(x+1)+f(-1)$.
Je calcule ces deux valeurs :

$$f(-1) = \left((-1)^2-2\times(-1)-1\right)\mathrm{e}^{-1} = 2\,\mathrm{e}^{-1} = \frac{2}{e} \quad \text{et} \quad f'(-1) = \left((-1)^2-3\right)\mathrm{e}^{-1} = -2\,\mathrm{e}^{-1} = -\frac{2}{e}.$$

Finalement l'équation de la tangente devient

$$y = -\frac{2}{e}\times(x+1)+\frac{2}{e}, \qquad \textit{i.e.} \quad y = -\frac{2}{e}x.$$

Lorsque x vaut 0, j'obtiens que y vaut aussi 0, ce qui confirme bien que cette tangente passe par l'origine du repère.

16. a) L'équation d'une tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 est $y = f'(x_0) \times (x - x_0) + f(x_0)$. Cette tangente passe par l'origine si et seulement cette équation est vérifiée lorsque $(x, y) = (0,0)$, *i.e.*

$$0 = f'(x_0) \times (0 - x_0) + f(x_0) \quad \Longleftrightarrow \quad f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$

b) En remplaçant $f(x_0)$ et $f'(x_0)$ par leurs expressions dans l'équation précédente, j'obtiens

$$\begin{aligned} f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \left(x_0^2 - 2x_0 - 1\right) \mathrm{e}^{x_0} - x_0\left(x_0^2 - 3\right) \mathrm{e}^{x_0} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \Big(x_0^2 - 2x_0 - 1 - \left(x_0^3 - 3x_0\right)\Big) \mathrm{e}^{x_0} = 0 \\ &\Longleftrightarrow \quad \left(-x_0^3 + x_0^2 + x_0 - 1\right) \mathrm{e}^{x_0} = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad -P(x_0)\, \mathrm{e}^{x_0} = 0. \end{aligned}$$

Comme une exponentielle n'est jamais nulle, alors on retrouve bien que la tangente passe par l'origine si et seulement si $P(x_0) = 0$.

c) Comme P n'admet que deux racines distinctes, alors il n'existe que deux abscisses pour lesquelles la tangente en ce point passe par l'origine : en -1 (la tangente déterminée à la question **15.**) et en 1.

Exercice 2 –

Partie 1

1. a) Il s'agit de $n = 2$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité p, répétitions identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 2$ et p.

   b) Les valeurs prises par X sont 0, 1 et 2 et pour tout $k \in [\![0, 2]\!]$,

$$\mathbf{P}(X = k) = \binom{2}{k} \times p^k \times (1-p)^{2-k}.$$

   En particulier, pour $k = 1$, $\mathbf{P}(X = 1) = \binom{2}{1} \times p^1 \times (1-p)^1 = 2p(1-p)$.

2. Le succès est obtenu lorsque les deux lancers aboutissent à deux résultats différents. Autrement dit, il y a un PILE et un FACE. Ainsi la probabilité du succès est égale à la probabilité de n'obtenir qu'un seul PILE, à savoir $\mathbf{P}(X = 1) = 2p(1-p)$.

3. a) Dans cette expérience, les cinq premiers lancers aboutissent à deux résultats similaires et il faut attendre le sixième lancer pour obtenir un PILE et un FACE.
   Ainsi le rang du premier succès est $N = 6$.

   b) La variable aléatoire N est égale au rang du premier succès lors de la répétition de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir deux résultats différents", de probabilité $2p(1-p)$, répétitions identiques et indépendantes.
   N suit donc une loi géométrique de paramètre $q = 2p(1-p)$.
   Le support de N est donné par $N(\Omega) = \mathbb{N}^*$ et pour tout $k \in \mathbb{N}^*$,

$$\mathbf{P}(X = k) = q \times (1-q)^{k-1} = 2p(1-p)\big(p^2 + (1-p)^2\big)^{k-1}.$$

   En effet si $q = \mathbf{P}(X = 1) = 2p(1-p)$, alors $1 - q = \mathbf{P}(X = 2) + \mathbf{P}(X = 0) = p^2 + (1-p)^2$.

   c) Comme N suit une loi géométrique, alors N admet une espérance et une variance et

$$E(N) = \frac{1}{q} = \frac{1}{2p(1-p)} \quad \text{et} \quad V(N) = \frac{1-q}{q^2} = \frac{p^2 + (1-p)^2}{4p^2(1-p)^2}.$$

4. a) Alice gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est PF.
   Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$\mathbf{P}\big(PF\big) = \mathbf{P}(P) \times \mathbf{P}(F) = p(1-p).$$

   b) Pour qu'Alice gagne à la seconde manche, dès lors que la seconde manche a lieu, la probabilité est la même. Et la probabilité que la seconde manche ait lieu est donnée par $1 - \mathbf{P}(X = 1) = 1 - q = p^2 + (1-p)^2$.
   Ainsi la probabilité qu'Alice gagne à la seconde manche est donnée par

$$p(1-p) \times \big(p^2 + (1-p)^2\big).$$

   c) La probabilité de victoire de Bob est égale à celle de Alice, puisque seul l'ordre d'apparition des résultats change : Bob gagne lors de la première manche si la séquence obtenue est FP. Comme les deux lancers sont indépendants, la probabilité est donnée par

$$\mathbf{P}\big(FP\big) = \mathbf{P}(F) \times \mathbf{P}(P) = (1-p) \times p = p(1-p).$$

   Comme il y a un PILE et un FACE des deux côtés, les probabilités sont égales, à la première comme à la seconde manche. Donc le jeu est équitable.

Partie 2

5. Voici la fonction `Python` complétée :

```
import numpy.random as rd
S=0
T=0
for k in range(1,4):
    r=rd.random()
    if r<1/2:
        S=S+1
    if r<1/2 and T==0:
        T=k
print("S=",S,"et T=",T)
```

6. La variable aléatoire S compte le nombre de succès lors de $n=3$ répétitions de l'épreuve de Bernoulli de succès "obtenir PILE", de probabilité $p=\dfrac{1}{2}$, répétitions identiques et indépendantes. Donc S suit une loi binomiale de paramètres $n=3$ et $p=\dfrac{1}{2}$.
Son espérance est donnée par $E(S)=n\times p=3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$.
7. Le support de T est donné par $T(\Omega)=\{0,1,2,3\}$, selon qu'aucun PILE soit obtenu ou que le premier PILE arrive au lancer 1, 2 ou 3.
8. L'événement $[S=2]\cap[T=1]$ correspond à ce que les trois lancers apportent deux PILE et que le premier soit obtenu au premier tirage. Il y a donc deux issues possibles :

$$[S=2]\cap[T=1]=\{(PPF),(PFP)\}.$$

Comme la pièce est équilibrée et que les tirages sont indépendants, les $2^3=8$ issues possibles ont la même probabilité d'arriver. Ainsi, comme deux issues sont favorables à cet événement, sa probabilité est donnée par $\dfrac{2}{8}=\dfrac{1}{4}$.
9. Voici les probabilités manquantes dans le tableau de la loi conjointe :

$$A=\mathbf{P}\big([S=0]\cap[T=1]\big)=0,\qquad B=\mathbf{P}\big([S=1]\cap[T=0]\big)=0,\qquad C=\mathbf{P}\big([S=A]\cap[T=3]\big)=\frac{1}{8}$$

$$D=\mathbf{P}\big([S=2]\cap[T=1]\big)=\frac{1}{4}\quad\text{et}\quad E=\mathbf{P}\big([S=3]\cap[T=3]\big)=0.$$

10. En décomposant selon les valeurs possibles et grâce à la loi conjointe,

$$\mathbf{P}(S=T)=\sum_{k=0}^{3}\mathbf{P}\big([S=k]\cap[T=k]\big)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+0=\frac{3}{8}.$$

11. Je cherche ici $\mathbf{P}_{[S=2]}(T=1)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$\mathbf{P}_{[S=2]}(T=1)=\frac{\mathbf{P}\big([S=2]\cap[T=1]\big)}{\mathbf{P}(S=2)}=\frac{\frac{1}{4}}{\frac{2}{8}+\frac{1}{8}}=\frac{2}{3}.$$

Partie 3

12. Je montre que la fonction g vérifie les trois conditions de la définition d'une densité :
   - Pour $t \notin [0,1[$, $g(t) = 0 \geqslant 0$ et pour $t \in [0,1[$, $g(t) = 6t(1-t) \geqslant 0$ car $t \geqslant 0$ et $t \leqslant 1$. Donc $\forall t \in \mathbb{R}, \quad g(t) \geqslant 0$.
   - La fonction g est continue sur $]-\infty, 0[$ car constante, elle est continue sur $[0,1[$ car polynomiale et elle est continue sur $[1,+\infty[$ car constante. Donc g admet au plus deux points de discontinuité en 0 et en 1.
   - Il reste à montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et vaut 1.

     Étant donnée l'expression de g, j'étudie séparément les intégrales suivantes :

     ▷ Déjà, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.

     ▷ Puis
$$\int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 6t(1-t)\,\mathrm{d}t = 6 \times \int_0^1 \left(t - t^2\right)\mathrm{d}t = 6 \times \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^1$$
$$= 6 \times \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3}\right) = 6 \times \frac{3-2}{6} = 6 \times \frac{1}{6} = 1.$$

     Grâce à la relation de Chasles, j'en déduis que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t$ converge et
$$\int_{-\infty}^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} g(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 g(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} g(t)\,\mathrm{d}t = 0 + 1 + 0 = 1.$$

   La fonction g vérifie les trois conditions donc g est bien une densité de probabilité.

13. a) Je cherche $P\left(Z = \dfrac{1}{2}\right)$. Or Z est une variable aléatoire à densité, donc $P\left(Z = \dfrac{1}{2}\right) = 0$.

   b) Si $x \in [0,1]$, alors g est nulle sur $]-\infty, 0[$ et $g(t) = 6t(1-t)$ pour $t \in [0,x]$. Alors
$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} g(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t + \int_0^x 6t(1-t)\,\mathrm{d}t = 0 + 6 \times \left[\frac{t^2}{2} - \frac{t^3}{3}\right]_0^x$$
$$= 6 \times \left(\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \frac{0}{2} + \frac{0}{3}\right) = 3x^2 - 2x^3.$$

   c) Je cherche $P\left(Z \leqslant \dfrac{1}{4}\right)$. Grâce à la fonction de répartition, comme $\dfrac{1}{4} \in [0,1]$, alors
$$P\left(Z \leqslant \frac{1}{4}\right) = F\left(\frac{1}{4}\right) = 3 \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 - 2 \times \left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{3}{16} - \frac{1}{32} = \frac{6-1}{32} = \frac{5}{32}.$$

   d) Z admet une espérance si et seulement si l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t$ converge.
   - Déjà, $\displaystyle\int_{-\infty}^{0} tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} 0\,\mathrm{d}t$ et $\displaystyle\int_{1}^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_{1}^{+\infty} 0\,\mathrm{d}t$ convergent et valent 0.
   - Puis
$$\int_0^1 tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^1 t \times 6t(1-t)\,\mathrm{d}t = 6 \times \int_0^1 \left(t^2 - t^3\right)\mathrm{d}t = 6 \times \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^4}{4}\right]_0^1$$
$$= 6 \times \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{0}{3} + \frac{0}{4}\right) = 6 \times \frac{4-3}{12} = 6 \times \frac{1}{12} = \frac{1}{2}.$$

   Alors la variable aléatoire Z admet une espérance et
$$E(Z) = \int_{-\infty}^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{0} tg(t)\,\mathrm{d}t + \int_0^1 tg(t)\,\mathrm{d}t + \int_1^{+\infty} tg(t)\,\mathrm{d}t = 0 + \frac{1}{2} + 0 = \frac{1}{2}.$$

Exercice 3 –

1. Je calcule la différence coefficient par coefficient puis le produit matriciel :

$$B - I_3 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$B \times (B - I_3) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-2 & 0 & 2-2 \\ -2+1+1 & 0 & -2+1+1 \\ -2+2 & 0 & -2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

2. Comme $B \times (B - I_3) = 0_3$, j'en déduis que le polynôme $x(x-1)$ est un polynôme annulateur de la matrice B.
3. Comme $B \times (B - I_3) = 0_3$, en développant le produit j'obtiens que $B^2 - B = 0_3$, *i.e.* $B^2 = B$. À partir de là, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, $B^n = B$.
4. Les valeurs propres possibles pour une matrice sont parmi les racines d'un polynôme annulateur. Or

$$x(x-1) = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x - 1 = 0 \iff x = 0 \text{ ou } x = 1.$$

Ainsi les valeurs propres possibles pour B sont 0 et 1.

5. 0 est une valeur propre de B s'il existe une solution non nulle $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de l'équation $BX = 0X$. Je résous alors cette équation :

$$BX = 0X \iff \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} -x & & & - & 2z & = & 0 \\ x & + & y & + & z & = & 0 \\ x & & & + & 2z & = & 0 \end{array} \right.$$

Je remarque que la troisième ligne est l'opposée de la première : elles sont donc équivalentes. Puis en additionnant la première à la deuxième, j'obtiens le système équivalent suivant :

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & & & + & 2z & = & 0 \\ & & y & - & z & = & 0 \end{array} \right. \iff \left\{ \begin{array}{rcr} x & = & -2z \\ y & = & z \end{array} \right.$$

Alors en fixant $z = 1$, j'obtiens une solution non nulle de l'équation matricielle $BX = 0X$:

$X = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Donc 0 est bien une valeur propre de la matrice B.

6. Si la matrice B était inversible, alors en notant B^{-1} son inverse et en multipliant l'équation précédemment obtenue par B^{-1} à gauche, j'obtiendrais

$$B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff B^{-1} \times B \times \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = B^{-1} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \iff \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

C'est évidemment une contradiction. Donc la matrice B n'est pas inversible.

7. a) Je calcule le produit matriciel :

$$BU = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = U.$$

b) La matrice colonne U est non nulle et satisfait l'équation matricielle $BU = 1U$.
Alors 1 est une valeur propre de la matrice B et U en est un vecteur propre associé.

c) Je calcule encore le produit matriciel :

$$BV = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-2 \\ -1+1 \\ -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = V.$$

La matrice colonne V est non nulle et satisfait l'équation matricielle $BV = 1V$.
Alors V est un vecteur propre de la matrice B associé à la valeur propre 1.

8. Je commence par calculer la matrice A :

$$M - I_3 = \begin{pmatrix} -7 & 0 & -8 \\ 4 & 1 & 4 \\ 4 & 0 & 5 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 4 & 0 & 4 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix},$$

$$\text{donc} \quad A = \frac{1}{4}(M - I_3) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = B - I_3.$$

Puis je calcule le produit matriciel $A^2 = A \times A$:

$$A^2 = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-2 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \\ -2+1 & 0 & -2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -A.$$

9. Par définition de M :

$$A = \frac{1}{4}(M - I_3) \iff 4A = M - I_3 \iff 4A + I_3 = M.$$

10. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = I_3 + u_n A$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad I_3 + u_0 A = I_3 + 0 \times A = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $M^n = I_3 + u_n A$. Alors

$$\begin{aligned} M^{n+1} &= M^n \times M = \big(I_3 + u_n A\big) \times \big(I_3 + 4A\big) = I_3 + 4A + u_n A + 4u_n A^2 = I_3 + 4A + u_n A - 4u_n A \\ &= I_3 + \big(4 + u_n - 4u_n\big) \times A = I_3 + \big(4 - 3u_n\big) \times A = I_3 + u_{n+1} A. \end{aligned}$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + u_n A.$$

11. a) Pour montrer que la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime w_{n+1} en fonction de w_n pour un entier $n \in \mathbb{N}$ quelconque :

$$w_{n+1} = u_{n+1} - 1 = 4 - 3u_n - 1 = 4 - 3(w_n + 1) - 1 = 4 - 3w_n - 3 - 1 = -3w_n.$$

Ainsi la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = -3$.

b) Comme la suite $(w_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, de raison $q = -3$ et de premier terme $w_0 = u_0 - 1 = 0 - 1 = -1$, alors son expression explicite est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = w_0 \times q^n = -1 \times (-3)^n = -(-3)^n.$$

Puis comme pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $u_n = w_n + 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = w_n + 1 = 1 - (-3)^n.$$

12. En combinant que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $M^n = I_3 + u_n A$ et $u_n = 1 - (-3)^n$, alors j'obtiens que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = I_3 + \big(1 - (-3)^n\big)A.$$

13. a) À chaque itération de la boucle `while`, la variable `u` est actualisée de u_k à u_{k+1} puis `k` augmente de 1. Alors lorsque `k` vaut `n`, la variable `u` contient déjà la valeur de u_n.
Il est donc temps de sortir de la boucle.

b) Pour afficher u_{2023}, il suffira de faire appel à cette fonction et d'afficher le résultat à l'aide de l'instruction :

```
print(term(2023))
```

14. J'ai déjà remarqué à la question **8.** que $A = B - I_3$. Alors en combinant cela avec $M = 4A + I_3$, j'obtiens que

$$M = 4A + I_3 = 4\big(B - I_3\big) + I_3 = 4B - 4I_3 + I_3 = 4B - 3I_3.$$

Ainsi choisir $\alpha = -3$ et $\beta = 4$ convient.

15. D'après la formule du binôme de Newton, comme les matrices I_3 et B commutent, et comme pour tout $k \geqslant 1$, $B^k = B$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$M^n = \big(4B - 3I_3\big)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \big(4B\big)^k \times \big(-3I_3\big)^{n-k} = (-3)^n I_3 + \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k}\right) \times B.$$

Puis je cherche à simplifier le coefficient devant la matrice B :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times 4^k \times (-3)^{n-k} &= (-3)^n \times \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times \left(\frac{4}{3}\right)^k = (-3)^n \times \left(\sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k}\right) \\
&= (-3)^n \times \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times \left(-\frac{4}{3}\right)^k \times 1^{n-k} - 1\right) = (-3)^n \times \left(\left(1 - \frac{4}{3}\right)^n - 1\right) \\
&= (-3)^n \times \left(\left(-\frac{1}{3}\right)^n - 1\right) = 1 - (-3)^n.
\end{aligned}$$

Finalement j'obtiens que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = (-3)^n I_3 + \big(1 - (-3)^n\big) B.$$

Et en injectant que $A = B - I_3$ dans l'expression obtenue à la question **12.**, je retrouve bien cette expression : pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$M^n = I_3 + \big(1 - (-3)^n\big) \times \big(B - I_3\big) = I_3 + \big(1 - (-3)^n\big)B - I_3 + (-3)^n I_3 = \big(1 - (-3)^n\big)B + (-3)^n I_3.$$