DEVOIR SURVEILLÉ 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!

L'épreuve est constituée de quatre exercices indépendants. Dans les exercices 3 et 4 :

- *La probabilité d'un événement J est notée $P(J)$. Si C est un événement de probabilité non nulle, on note $P_C(J)$ la probabilité conditionnelle de J sachant C.*
- *On note Ω l'univers des résultats observables et si T est une variable aléatoire, on note $T(\Omega)$ l'ensemble des valeurs prises par T.*
- *Sous réserve d'existence, on note respectivement $E(T)$ et $V(T)$ l'espérance et la variance de T.*

Exercice 1 –

Soient a, b, c et d des réels et soit $\mathcal{E}$ l'ensemble des matrices carrées $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ d'ordre 2 qui vérifient les deux conditions $a + d = 0$ et $ad - bc = 0$.

1. a) Les matrices de $\mathcal{E}$ sont-elles inversibles ?

   b) Vérifier que les deux matrices $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ appartiennent à $\mathcal{E}$.

   c) En déduire que la somme et le produit de deux matrices de $\mathcal{E}$ n'appartiennent pas nécessairement à $\mathcal{E}$.

   d) Soit $M = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice de $\mathcal{E}$.
   Déterminer la matrice M^2 et en déduire pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.

Dans la suite de l'exercice, on pose $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ *et on note* $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ *la matrice identité d'ordre* 2.

2. a) Justifier l'inversibilité de la matrice A.

   b) On pose $K = A - 3I$. Vérifier que la matrice K appartient à $\mathcal{E}$.

   c) On rappelle que si B est une matrice carrée d'ordre 2, on pose par convention $B^0 = I$.

      (i) Exprimer pour tout entier naturel n, la matrice A^n en fonction de n, I et K.

      (ii) Donner l'expression de A^n sous forme d'un tableau matriciel.

3. a) Établir l'existence d'un unique couple $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$ que l'on déterminera, pour lequel $A^2 + \alpha A + \beta I$ est la matrice nulle.

b) Retrouver le fait que la matrice A est inversible et montrer que $A^{-1} = \dfrac{2}{3}I - \dfrac{1}{9}A$.

c) En déduire que $A^{-1} = \dfrac{1}{3}I - \dfrac{1}{9}K$ et vérifier que la formule trouvée à la question **2.c)** ***(i)*** pour tout $n \in \mathbb{N}$ est encore valide pour tout $n \in \mathbb{Z}$.

4. a) Trouver les racines du polynôme $x^2 - 6x + 9$.

b) Montrer qu'il existe une matrice colonne non nulle X qui soit solution de l'équation matricielle $AX = 3X$.

Exercice 2 –

Dans tout l'exercice, on pose $I_0 = \displaystyle\int_1^e t\,\mathrm{d}t$ *et pour tout* $n \in \mathbb{N}^*$, $I_n = \displaystyle\int_1^e t\big(\ln t\big)^n\,\mathrm{d}t$.

1. a) Calculer I_0.

b) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $I_n \geqslant 0$.

c) Montrer que la suite $\big(I_n\big)_{n\geqslant 0}$ est décroissante puis qu'elle est convergente.

2. a) Pour tout entier naturel n, soit f_n la fonction définie sur l'intervalle $\big[1, e\big]$ par

$$\forall t \in \big[1, e\big], \quad f_n(t) = \big(\ln t\big)^{n+1}.$$

On note f_n' la dérivée de la fonction f_n. Pour tout $t \in \big[1, e\big]$, calculer $f_n'(t)$.

b) À l'aide d'une intégration par parties, établir pour tout entier naturel n, la relation $(*)$ suivante :

$$(*) \qquad 2I_{n+1} + (n+1)I_n = e^2.$$

c) En déduire la valeur de I_1.

d) En utilisant la relation $(*)$ et la décroissance de la suite $(I_n)_{n\geqslant 0}$,
établir pour tout entier naturel n, l'encadrement suivant :

$$\frac{e^2}{n+3} \leqslant I_n \leqslant \frac{e^2}{n+2}.$$

e) En déduire les limites respectives des deux suites $\big(I_n\big)_{n\geqslant 0}$ et $\big(nI_n\big)_{n\geqslant 0}$.

f) Utiliser la relation $(*)$ pour compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle calcule et affiche I_n pour une valeur de n donnée.

```
import numpy as np
def calculI(n):
    I=......
    for k in range(n):
        I=......
    return I
```

3. a) Établir pour tout entier naturel n l'encadrement

$$\frac{(3n+10)e^2}{(n+3)(n+4)} \leqslant 2I_{n+1} + I_n \leqslant \frac{(3n+7)e^2}{(n+2)(n+3)}.$$

b) Pour tout entier naturel n, on pose $w_n = n\big(e^2 - nI_n\big)$. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} w_n = 3e^2$.

4. À l'aide d'un raisonnement par récurrence, établir pour tout entier naturel n, l'égalité

$$I_n = \frac{(-1)^n n!}{2^{n+1}}\left(e^2 \sum_{k=0}^{n} \frac{(-2)^k}{k!} - 1\right).$$

Exercice 3 –

On suppose que l'on dispose d'un stock illimité de boules rouges et de boules blanches indiscernables au toucher. Une urne contient initialement une boule rouge et une boule blanche.

On effectue dans cette urne une succession d'expériences aléatoires selon le protocole suivant : on extrait une boule de l'urne et après chaque tirage, la boule tirée est remise dans l'urne et on ajoute dans l'urne une boule de la même couleur que la boule tirée.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on note X_n (respectivement Y_n) la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges (respectivement blanches) contenues dans l'urne à l'issue de la n-ième expérience, c'est-à-dire après le tirage d'une boule et la remise d'une boule supplémentaire.

Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note R_k (respectivement B_k) l'événement : "tirer une boule rouge (respectivement blanche) lors du k-ième tirage".

1. a) Justifier que $X_1(\Omega) = [\![1,2]\!]$. Donner la loi de X_1. Calculer $E(X_1)$ et $V(X_1)$.
   b) Exprimer les événements $[X_2 = 1]$, $[X_2 = 2]$ et $[X_2 = 3]$
   en fonction des événements B_1, B_2, R_1 et R_2.
   c) Montrer que X_2 suit la loi discrète uniforme sur $[\![1,3]\!]$. En déduire $E(X_2)$ et $V(X_2)$.
2. a) Donner sous forme de tableau la loi conjointe du couple $\big(X_1, X_2\big)$.
   b) Calculer la covariance de X_1 et X_2.
   Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?
3. a) Pour tout entier $n \geqslant 1$, exprimer l'événement $[X_n = 1]$
   en fonction des événements $B_1, B_2, \ldots, B_n$.
   b) Montrer que $P\big([X_n = 1]\big) = \dfrac{1}{n+1}$. De même, calculer $P\big([X_n = n+1]\big)$.
4. a) Établir pour tout entier $k \in [\![2, n+1]\!]$, les égalités suivantes :
$$P_{[X_n=k-1]}\big([X_{n+1} = k]\big) = \frac{k-1}{n+2} \quad \text{et} \quad P_{[X_n=k]}\big([X_{n+1} = k]\big) = \frac{n+2-k}{n+2}.$$
   b) En déduire pour tout $k \in [\![2, n+1]\!]$, une relation entre $P\big([X_{n+1} = k]\big)$, $P\big([X_n = k]\big)$ et $P\big([X_n = k-1]\big)$.
   c) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$,
   la variable aléatoire X_n suit la loi discrète uniforme sur $[\![1, n+1]\!]$.
5. Compléter la fonction `Python` suivante afin qu'elle simule une réalisation de la variable aléatoire X_n pour un entier n donné.

```
import numpy.random as rd
def simulationX(n):
    r=1; b=1
    for k in range(n):
        if rd.random()<r/(r+b):
            ....
        else:
            ....
    x=....
    return x
```

6. a) Justifier que les variables aléatoires X_n et Y_n sont de même loi.
   b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, que vaut $X_n + Y_n$?
   c) Quel est le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n ?

Exercice 4 –

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

   b) On rappelle que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que pour tout entier $n \geqslant 0$, il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$. On vérifiera que

   $$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n. \end{cases}$$

   c) Exprimer u_n en fonction de n.

   d) Démontrer que $\quad \forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k.$

   e) En déduire une expression simplifiée de v_n puis écrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$, où a, b, c sont trois réels.

   a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ s'écrit sous la forme

   $$f'(x) = \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)e^{-x}$$

   où a_1, b_1, c_1 sont trois réels. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   b) Expliciter $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice A^{-1}.

3. **Application.** Soient r et s les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = \left(x+1\right)e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = \left(x^2 + x\right)e^{-x}.$$

   Déduire de la question précédente une primitive R de r et une primitive S de s.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

   $$\forall x < 0, \quad g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(x+1\right)e^{-x}.$$

   a) Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^X xg(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) En déduire la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ puis donner leurs valeurs respectives.

   c) Prouver que g est une densité de probabilité.

   d) Soit Y une variable aléatoire possédant g pour densité.
   Démontrer que Y admet une espérance et donner la valeur de $E(Y)$.