DEVOIR SURVEILLÉ 4

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes :

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad L = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. Calculer P^3. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
2. Vérifier que $P^{-1}AP = L$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $P^{-1}A^nP = L^n$.
   b) Soit $J = L - I$. Calculer J^2 puis J^3.
   c) En utilisant la formule du binôme, montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a
   $$L^n = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
   d) En déduire, pour $n \geqslant 2$, les neufs coefficients de L^n.
   Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n = 0$ et lorsque $n = 1$.
   e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
   $$A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$
4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$ définies par $u_1 = 1$, $v_1 = 0$ et $w_1 = 2$ et pour tout entier naturel $n \geqslant 1$,
   $$u_{n+1} = u_n, \qquad v_{n+1} = v_n + 2w_n \quad \text{et} \quad w_{n+1} = 2u_n + w_n.$$
   a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$? Donner u_n pour tout entier $n \geqslant 1$.
   b) Pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose $X_n = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1} = AX_n$.
   c) Établir pour tout entier $n \geqslant 1$ que $X_n = A^{n-1}X_1$.
   d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a
   $$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

5. On considère le programme suivant qui permet de calculer les premiers termes des suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$, $(v_n)_{n\geqslant 1}$ et $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

```
1.  import numpy as np
2.  A=np.array(....)
3.  u=np.zeros(10)
4.  v=np.zeros(10)
5.  w=np.zeros(10)
6.  u[0]=1; v[0]=0; w[0]=2
7.  X=np.array([[1],[0],[2]])
8.  for i in range(1,10):
9.      X=np.dot(A,X)
10.     u[i]=1
11.     ....
12.     ....
```

   a) Compléter la ligne 2 afin que soit mémorisée dans la variable `A` la matrice A.

   b) Pour mémoriser les termes successifs de la suite $(v_n)_{n\geqslant 1}$ de v_2 à v_{10}, quelle instruction parmi celles-ci faut-il ajouter en ligne 11 ? (On justifiera la réponse.)

   A. `v[i]=X[i]` B. `v[i]=X` C. `v[i]=X[1]`
   D. une autre instruction à préciser.

   c) Proposer de la même manière une instruction pour la ligne 12 qui permette de mémoriser les premiers termes de la suite $(w_n)_{n\geqslant 1}$.

Exercice 2 – On considère la fonction f définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x) = e^x - \ln(x)$
et la fonction g définie sur $[0,+\infty[$ par $g(x) = xe^x - 1$.

1. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)$.

   b) Calculer la dérivée g' de g sur $[0,+\infty[$. En déduire le tableau des variations de g. On y fera figurer la valeur en 0 et la limite en $+\infty$.

   c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $[0,+\infty[$. Vérifier que $\alpha \in [0,1]$.

   d) Préciser le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

2. a) Calculer la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers 0 par valeurs supérieures et la limite de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$.

   b) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x strictement positif,
$$f'(x) = \frac{g(x)}{x}.$$
   En déduire le tableau des variations de f sur $]0,+\infty[$.

   c) Justifier que le réel α vérifie $\dfrac{1}{\alpha} = e^{\alpha}$. En déduire que $f(\alpha) = \alpha + \dfrac{1}{\alpha}$.

3. a) Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel $x \in]0,+\infty[$,
$$f''(x) = e^x + \frac{1}{x^2}.$$

   b) Étudier la convexité de f sur $]0,+\infty[$.

4. Tracer la représentation graphique de f dans un repère orthonormé $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath})$ d'unité 2cm. On donne $\alpha \approx 0.57$ et $f(\alpha) \approx 2.33$.

Exercice 3 – Dans un square, un enfant cherche à monter au sommet de la *"cage à l'écureuil"*. Il s'agit d'une structure métallique que l'enfant doit escalader jusqu'à son sommet.
La cage est constituée de trois niveaux. L'enfant part du premier niveau A. Il cherche ensuite à atteindre le deuxième niveau B et enfin le troisième niveau qui est le sommet C.
On décompose l'ascension de l'enfant en une succession d'instants. On suppose qu'à l'instant 0, l'enfant se trouve sur le niveau A puis que la montée se fait selon le protocole suivant :

- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau A, alors à l'instant suivant $n+1$, il y reste avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et passe au B avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau B, alors à l'instant suivant $n+1$, il y reste avec la probabilité $\dfrac{1}{3}$ et passe au C avec la probabilité $\dfrac{2}{3}$.
- Si à un instant n donné l'enfant est sur le niveau C, alors il y reste définitivement.

On note pour tout entier naturel n, A_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau A à l'instant n", B_n l'événement : "l'enfant se trouve sur le niveau B à l'instant n". On note enfin C_n l'événement : "à l'instant n l'enfant est au sommet". On note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives de ces trois événements.

1. Donner les probabilités a_1, b_1 et c_1.
2. En utilisant la formule des probabilités totales, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n, \qquad b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n \quad \text{et} \quad c_{n+1} = \frac{2}{3}b_n + c_n.$$
3. Montrer que pour tout entier naturel n, on a $\quad a_n = \dfrac{1}{3^n}$.
4. Pour tout entier naturel n, on pose $\quad v_n = 3^n b_n$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est arithmétique de raison 2.
   b) En déduire, pour tout entier naturel n, une expression de v_n en fonction de n.
   Établir pour tout entier naturel n que $\quad b_n = \dfrac{2n}{3^n}$.
5. Pour tout entier naturel n, quelle est la valeur de $a_n + b_n + c_n$?
   En déduire une expression de c_n en fonction de l'entier n.
   Calculer $\lim\limits_{n\to+\infty} c_n$. Comment interpréter le résultat ?
6. On note X la variable aléatoire égale à l'instant où l'enfant atteint le sommet.
   a) Déterminer l'ensemble des valeurs prises par X.
   b) Justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, on a $\quad [X = n] = B_{n-1} \cap C_n$.
   c) En déduire, pour $n \geqslant 2$, que $\quad P(X = n) = \dfrac{4(n-1)}{3^n}$.
7. a) On note X_1 la variable aléatoire égale à l'instant où pour la première fois l'enfant quitte le niveau A pour arriver sur le niveau B.
   Justifier que X_1 suit une loi usuelle. Donner l'ensemble $X_1(\Omega)$ des valeurs prises par X_1 et donner $P(X_1 = k)$ pour tout entier k de $X_1(\Omega)$. Calculer $E(X_1)$.
   b) On note X_2 la variable aléatoire égale au nombre d'instants supplémentaires nécessaires à l'enfant pour atteindre pour la première fois le niveau C une fois qu'il a atteint le niveau B. Justifier que X_2 suit la même loi que X_1.
   c) Exprimer la variable aléatoire X en fonction de X_1 et X_2.
   En déduire que X admet une espérance et que $\quad E(X) = 3$.

Exercice 4 –

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$.

   a) Montrer que A est inversible et expliciter A^{-1}.

   b) On rappelle que $A^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Prouver que pour tout entier $n \geqslant 0$,

   il existe deux réels u_n et v_n tels que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2u_n & 1 & 0 \\ v_n & u_n & 1 \end{pmatrix}$. On vérifiera que

$$u_0 = v_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} = u_n - 1 \\ v_{n+1} = v_n - 2u_n. \end{cases}$$

   c) Exprimer u_n en fonction de n.

   d) Démontrer que $\forall n \geqslant 1, \quad v_n = 2\sum_{k=0}^{n-1} k$.

   e) En déduire une expression simplifiée de v_n puis écrire A^n sous la forme d'un tableau de nombres.

2. Soit f la fonction qui à tout réel x associe $f(x) = \left(ax^2 + bx + c\right)e^{-x}$, où a, b, c sont trois réels.

   a) Pour tout réel x, calculer $f'(x)$ et montrer que $f'(x)$ s'écrit sous la forme

$$f'(x) = \left(a_1x^2 + b_1x + c_1\right)e^{-x}$$

   où a_1, b_1, c_1 sont trois réels. Vérifier que $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} = -A\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$.

   b) Expliciter $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ en fonction de $\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}$ en utilisant la matrice A^{-1}.

3. **Application.** Soient r et s les deux fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad r(x) = \left(x+1\right)e^{-x} \quad \text{et} \quad s(x) = \left(x^2 + x\right)e^{-x}.$$

   Déduire de la question précédente une primitive R de r et une primitive S de s.

4. On considère la fonction g définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x < 0, \quad g(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \geqslant 0, \quad g(x) = \frac{1}{2}\left(x+1\right)e^{-x}.$$

   a) Soit $X \in [0, +\infty[$. Calculer $\displaystyle\int_0^X g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^X xg(x)\,\mathrm{d}x$.

   b) En déduire la convergence des intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ et $\displaystyle\int_0^{+\infty} xg(x)\,\mathrm{d}x$ puis donner leurs valeurs respectives.

   c) Prouver que g est une densité de probabilité.

   d) Soit Y une variable aléatoire possédant g pour densité.
   Démontrer que Y admet une espérance et donner la valeur de $E(Y)$.