DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – [ESCP 2015 / Ex2]

1. a) Pour cette question, $a = b = -1$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.
Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Or $\det(M) = 1 \times (-1) - 1 \times (-1) = -1 - (-1) = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

   b) Je commence par calculer M^2 :

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1-1 & -1+1 \\ 1-1 & -1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_2.$$

Puisque M^2 est la matrice nulle, alors pour tout $n \geqslant 2$,

$$M^n = M^2 \times M^{n-2} = 0_2 \times M^{n-2} = 0_2.$$

2. a) Pour cette question, $a = b$ donc la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix}$.
Une matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si son déterminant est non nul.
Or $\det(M) = 1 \times a - 1 \times a = a - a = 0$ donc la matrice M n'est pas inversible.

   b) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 2$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = (1+a)^{n-1} M$.

Initialisation : Pour $n = 2$, je calcule M^2 et vérifie que $M^2 = (1+a) \times M = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix}$:

$$M^2 = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+a & a+a^2 \\ 1+a & a+a^2 \end{pmatrix} = (1+a) \times M.$$

Ainsi $\mathcal{P}_2$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $M^n = (1+a)^{n-1} M$. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = (1+a)^{n-1} M \times M = (1+a)^{n-1} M^2 = (1+a)^{n-1}(1+a) M = (1+a)^n M.$$

Donc $M^{n+1} = (1+a)^n M$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 2$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 2$, *i.e.*

$$\forall n \geqslant 2, \quad M^n = (1+a)^{n-1} M.$$

3. Dans le cas général, la matrice M est la matrice $M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}$ et cette matrice carrée de taille 2 est inversible si et seulement si

$$\det(M) \neq 0 \iff 1 \times b - 1 \times a \neq 0 \iff b - a \neq 0 \iff a \neq b.$$

4. a) Je cherche à exprimer la probabilité de l'événement $[X = Y]$. Les deux variables aléatoires doivent êtres égales mais peuvent prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{N}^*$. Ainsi

$$\left[X = Y\right] = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = Y(\omega)\right\} = \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k \text{ pour tout } k \in \mathbb{N}^*\right\}.$$

i.e.

$$\left[X = Y\right] = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) = k \text{ et } Y(\omega) = k\right\} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}^*} \left([X = k] \cap [Y = k]\right).$$

Alors par incompatibilité des événements puis par indépendance des variables aléatoires X et Y, j'obtiens que les probabilités concernées vérifient

$$P\big([X = Y]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P\big([X = k] \cap [Y = k]\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k).$$

Ainsi j'ai bien montré que $P(X = Y) = \sum\limits_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$.

b) Afin d'établir la convergence de cette somme, je passe par la somme partielle.

Pour $n \in \mathbb{N}^*$, je fixe $S_n = \sum\limits_{k=1}^{n} p^2 q^{2k-2}$. Alors

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} p^2 q^{2k-2} = p^2 \times \sum_{k=1}^{n} \left(q^2\right)^{k-1} = p^2 \times \sum_{j=0}^{n-1} \left(q^2\right)^j \qquad \text{en posant } j = k-1.$$

Je reconnais alors la somme partielle d'une série géométrique de raison q^2.

Puisque $q = 1-p$ avec $0 < p < 1$, alors $0 < q < 1$ et par conséquent $0 < q^2 < 1$.

Donc la série géométrique est convergente et admet pour somme $\sum\limits_{j=0}^{+\infty} \left(q^2\right)^j = \dfrac{1}{1-q^2}$.

Alors

$$\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2} = \lim_{n\to+\infty} S_n = p^2 \times \frac{1}{1-q^2} = \frac{(1-q)^2}{1-q^2} = \frac{(1-q)(1-q)}{(1-q)(1+q)} = \frac{1-q}{1+q}.$$

c) L'événement A est l'événement contraire de $[X = Y]$ puisque d'après la question **3.**, la matrice N n'est inversible que lorsque les deux variables aléatoires X et Y prennent des valeurs différentes. Donc

$$P(A) = 1 - P\big(X = Y\big).$$

Mais comme X et Y suivent toutes deux une loi géométrique de paramètre p,
alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, $\quad P(X = k) = P(Y = k) = p \times (1-p)^{k-1} = p \times q^{k-1}$.
Donc

$$P(A) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} pq^{k-1} \times pq^{k-1} = 1 - \sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}.$$

Alors grâce au résultat de la question précédente, j'en déduis que

$$P(A) = 1 - \frac{1-q}{1+q} = \frac{1+q}{1+q} - \frac{1-q}{1+q} = \frac{1+q-(1-q)}{1+q} = \frac{2q}{1+q}.$$

5. a) Pour tout réel $x \in \mathbb{R}$ et tout entier $n \in \mathbb{N}$, la formule du binôme de Newton me donne

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \times x^k \times 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k.$$

Puis en appliquant cette formule à l'entier $2n \in \mathbb{N}$, j'obtiens

$$(x+1)^{2n} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} \times x^k \times 1^{2n-k} = \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k.$$

b) Comme rappelé par l'énoncé, je sais que $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, c'est-à-dire d'après la question précédente, en modifiant les variables de sommation pour plus de clarté,

$$\sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} x^k = \left(\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i\right) \times \left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} x^j\right).$$

Ces deux quantités sont deux polynômes de degré $2n$. Cette égalité implique donc $2n+1$ égalités des coefficients de degré k pour tout $k \in [\![0, 2n]\!]$.

En particulier pour $k = n$, le coefficient à gauche vaut $\binom{2n}{n}$ tandis que le coefficient de droite est la somme de tous les produits $\binom{n}{i}\binom{n}{j}$ pour les valeurs de i et de j entre 0 et n telles que $i + j = n$. Ainsi en posant $i = k$, alors $j = n - k$ et j'obtiens bien la formule :

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

c) Dans la question **4.a)**, je n'ai pas utilisé les lois des variables aléatoires, donc la formule est toujours vraie dans ce cas précis. Cette fois en revanche, X et Y suivent toutes deux une loi binomiale de paramètres n et $p = \frac{1}{2}$ donc pour tout $k \in [\![0, n]\!]$,

$$P(X = k) = P(Y = k) = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^k \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \binom{n}{k} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2^n} \times \binom{n}{k}.$$

Donc

$$P\big(X = Y\big) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k) = \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} \times \frac{1}{2^n}\binom{n}{k} = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k}\binom{n}{k}.$$

Et puisque par symétrie $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, alors d'après la question précédente,

$$P\big(X = Y\big) = \frac{1}{4^n} \sum_{k=1}^{+\infty} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k} = \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

d) Pour les mêmes raisons que dans la question **4.c)**, $P(A) = 1 - P\big(X = Y\big)$ et donc

$$P(A) = 1 - \frac{1}{4^n}\binom{2n}{n}.$$

Exercice 2 – [ESCP 2015 / Ex4]

1. En remplaçant n par 0 puis par 1 dans la définition de X_n, j'obtiens

$$X_0 = \begin{pmatrix} u_2 \\ u_1 \\ u_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \begin{pmatrix} u_3 \\ u_2 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_2 - \frac{5}{4}u_1 + \frac{1}{4}u_0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

2. a) Je calcule le produit AX_n pour tout $n \in \mathbb{N}$: comme $A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

alors

$$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & -\frac{5}{4} & \frac{1}{4} \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_{n+3} \\ u_{n+2} \\ u_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

J'ai bien montré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad X_{n+1} = AX_n$.

b) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad A^0 X_0 = IX_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

3. a) Je calcule le produit PQ :

$$PQ = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 16-4-8 & -16+4+12 & 4-4 \\ 16-8-8 & -16+8+12 & 4-4 \\ 16-16 & -16+16 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} = 4I.$$

Comme $PQ = 4I$, alors la matrice P est inversible et $\quad P^{-1} = \frac{1}{4}Q$.

b) Je calcule les produits PT et AP :

$$PT = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 2+4 \\ 2 & 2 & 4+4 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$AP = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 8-5+1 & 8-10+4 & 32-20 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 4 & 2 & 12 \\ 4 & 4 & 16 \\ 4 & 8 & 16 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 1 & 6 \\ 2 & 2 & 8 \\ 2 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$

J'ai ainsi montré que $AP = PT$ et, comme la matrice P est inversible,
alors en multipliant à droite par P^{-1}, j'en déduis que $\quad A = PTP^{-1}$.

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = PT^nP^{-1}$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$A^0 = I \quad \text{et} \quad PT^0P^{-1} = PIP^{-1} = PP^{-1} = I.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$A^{n+1} = A^n \times A = PT^nP^{-1} \times PTP^{-1} = PT^n \times TP^{-1} = PT^{n+1}P^{-1}.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PT^nP^{-1}.$$

4. a) Je commence par déterminer l'expression de la matrice N avant d'en calculer les puissances successives :

$$N = T - D = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N^2 = N \times N = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Et donc pour tout entier $k \geqslant 2$, $N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

b) Je calcule les produits DN et ND :

$$D \times N = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N \times D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $DN = ND$ et ainsi, d'après la formule du binôme de Newton,

$$T^n = \left(N + D\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k D^{n-k} = \binom{n}{0} N^0 D^{n-0} + \binom{n}{1} N^1 D^{n-1} = D^n + nND^{n-1}.$$

En effet, tous les autres termes de la somme sont nuls puisque la matrice N y est élevée à une puissance $k \geqslant 2$. Et comme la matrice D est diagonale, alors

$$D^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalement,

$$\begin{aligned}
T^n &= D^n + nND^{n-1} = D^n + n \times ND \times D^{n-2} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2} \begin{pmatrix} 2^{n-2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

c) Je calcule PT^n avant de multiplier le résultat par P^{-1} pour obtenir $A^n = PT^nP^{-1}$:

$$P \times T^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix} \times \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 1 & 2n+4 \\ 2^n & 2 & 4n+4 \\ 2^n & 4 & 8n \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}
PT^n \times P^{-1} &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+2} \begin{pmatrix} 16 \times 2^n - 4 - 2(2n+4) & -16 \times 2^n + 4 + 3(2n+4) & 4 \times 2^n - (2n+4) \\ 16 \times 2^n - 8 - 2(4n+4) & -16 \times 2^n + 8 + 3(4n+4) & 4 \times 2^n - (4n+4) \\ 16 \times 2^n - 16 - 16n & -16 \times 2^n + 16 + 24n & 4 \times 2^n - 8n \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi, j'ai montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix}.$$

5. a) D'après la question **2.b)**, je sais que $X_n = A^n X_0$ et que son dernier coefficient est u_n. Par conséquent,

$$\begin{aligned}
X_n &= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 & -2^{n+3} + 3n + 8 & 2^{n+1} - n - 2 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 & -2^{n+3} + 6n + 10 & 2^{n+1} - 2n - 2 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 & -2^{n+3} + 12n + 8 & 2^{n+1} - 4n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
&= \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} \begin{pmatrix} 2^{n+3} - 2n - 6 \\ 2^{n+3} - 4n - 8 \\ 2^{n+3} - 8n - 8 \end{pmatrix} = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^{n+2} - n - 3 \\ 2^{n+2} - 2n - 4 \\ 2^{n+2} - 4n - 4 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

En particulier,

$$u_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \times \left(2^{n+2} - 4n - 4\right) = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n}.$$

b) Je réécris l'expression de u_n afin d'en calculer aisément la limite :

$$u_n = \frac{2^{n+2} - 4n - 4}{2^n} = 4 - 4 \times \frac{n}{2^n} - 4 \times \frac{1}{2^n}.$$

Enfin, comme par quotient, $\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2^n} = 0$, et par croissances comparées, $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{2^n} = 0$, alors par somme,

$$\lim_{n \to +\infty} u_n = 4.$$

Exercice 3 – [ESCP 2016 / Ex2]

1. Voici la fonction complétée.

```
import numpy as np
def calculu(n):
    u=1
    for k in range(n):
        u=np.log(1+u**2)
    return u
```

2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 \leqslant u_n \leqslant 1$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$u_0 = 1 \quad \text{et} \quad 0 \leqslant 1 \leqslant 1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 \leqslant u_n \leqslant 1$. Donc par croissance de la fonction carré sur l'intervalle $[0,1]$, $0 = 0^2 \leqslant u_n^2 \leqslant 1^2 = 1$ et $1 \leqslant 1 + u_n^2 \leqslant 2$.
Enfin par croissance de la fonction ln sur l'intervalle $[1,2]$, alors $\ln 1 \leqslant \ln\left(1+u_n^2\right) \leqslant \ln 2$.
Comme $\ln 1 = 0$ et $\ln 2 \approx 0.7 \leqslant 1$, alors $0 \leqslant \ln\left(1+u_n^2\right) \leqslant 1$, *i.e.* $0 \leqslant u_{n+1} \leqslant 1$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1.$$

3. a) La fonction f est dérivable sur l'intervalle $[0,1]$ et de la forme $f(x) = \ln\left(u(x)\right) - x$, avec $u(x) = 1 + x^2$. Donc pour tout $x \in [0,1]$,

$$f'(x) = \frac{u'(x)}{u(x)} - 1 = \frac{2x}{1+x^2} - 1 = \frac{2x - 1 - x^2}{1+x^2} = \frac{-\left(x^2 - 2x + 1\right)}{1+x^2} = -\frac{(x-1)^2}{1+x^2} \leqslant 0,$$

puisque $1 + x^2 \geqslant 1 > 0$ et $(x-1)^2 \geqslant 0$. De plus, $f'(x)$ ne s'annule qu'en une seule valeur : $x = 1$. Par conséquent, la fonction f est strictement décroissante sur $[0,1]$.
Sachant que $f(0) = \ln\left(1+0^2\right) - 0 = \ln 1 = 0$ et $f(1) = \ln\left(1+1^2\right) - 1 = \ln 2 - 1$, alors j'obtiens le tableau suivant :

x	0		1
$f'(x)$		$-$	0
f	0	$\searrow$	$\ln 2 - 1$

Puisque la fonction f est décroissante sur l'intervalle $[0,1]$ et que $f(0) = 0$, alors pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \leqslant 0$.

b) Je calcule la différence entre deux termes consécutifs pour déterminer les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = \ln\left(1 + u_n^2\right) - u_n = f(u_n).$$

Or d'après les questions précédentes, je sais que $u_n \in [0,1]$ et par conséquent, $f(u_n) \leqslant 0$. Finalement $u_{n+1} - u_n \leqslant 0 \iff u_{n+1} \leqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

c) J'ai montré à la question **2.** que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée, en particulier minorée par 0. Comme la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi décroissante, alors je peux déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge grâce au théorème de la limite monotone.

4. a) Pour tout réel $x \geqslant 0$, je pose $g(x) = \ln(1+x) - x$.
La fonction g est dérivable sur $[0,+\infty[$ et pour tout $x \geqslant 0$,

$$g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1 = -\frac{x}{1+x} \leqslant 0.$$

Par conséquent, la fonction g est décroissante sur $[0,+\infty[$ et puisque $g(0) = 0$, alors pour tout $x \geqslant 0$, $g(x) \leqslant 0$. Autrement dit pour tout $x \geqslant 0$,

$$g(x) = \ln(1+x) - x \leqslant 0 \quad \iff \quad \ln(1+x) \leqslant x.$$

b) Soit $n \in \mathbb{N}$. En appliquant l'inégalité obtenue à la question précédente à $x = u_n^2 \geqslant 0$, j'obtiens que

$$\ln\left(1 + u_n^2\right) \leqslant u_n^2, \qquad \textit{i.e.} \quad u_{n+1} \leqslant u_n^2.$$

c) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \leqslant (\ln 2)^n$.

Initialisation : Pour $n = 1$,

$$u_1 = \ln\left(1 + 1^2\right) = \ln 2 \quad \text{et} \quad \ln 2 \leqslant (\ln 2)^1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_1$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 1$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \leqslant (\ln 2)^n$. Alors d'après la question **4.b)**,

$$u_{n+1} \leqslant u_n^2 \leqslant \left((\ln 2)^n\right)^2 = (\ln 2)^{2n} \leqslant (\ln 2)^{n+1},$$

la dernière inégalité découlant de $0 \leqslant \ln 2 \leqslant 1$ et $n \geqslant 1 \Longrightarrow 2n \geqslant n+1$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

d) En combinant les inégalités obtenues précédemment, je sais que

$$\forall n \geqslant 1, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant (\ln 2)^n.$$

Puisque $\ln 2 \in]-1,1[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} (\ln 2)^n = 0$. Alors par théorème d'encadrement, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et que

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$

e) Il s'agit d'un algorithme de seuil : celui-ci calcule les termes successifs de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jusqu'à ce qu'un terme u_n soit inférieur à 0.001. Alors il affiche le rang de ce terme.
Ici comme le résultat affiché est 6, j'en conclus que $u_5 \geqslant 0.001$ et que $u_6 < 0.001$.

5. En me servant de l'inégalité obtenue à la question **4.c)**, qui est aussi vérifiée pour $n = 0$ puisque $u_0 = 1 \leqslant 1 = \left(\ln 2\right)^0$, et en passant à la somme j'obtiens alors la somme des premiers termes d'une suite géométrique que je sais calculer. Soit $n \geqslant 2$,

$$\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} \left(\ln 2\right)^k = \frac{1-\left(\ln 2\right)^{n-1+1}}{1-\ln 2} = \frac{1-\left(\ln 2\right)^n}{1-\ln 2}.$$

Exercice 4 – [ESCP 2016 / Ex4]

1. À chaque instant, la puce effectue un saut d'une, de deux ou de trois unités vers la droite. Donc le support de A_1, position après le premier saut, est donné par

$$A_1(\Omega) = [\![1,3]\!].$$

D'après l'énoncé, comme elle part du point d'abscisse 0 à l'instant 0, la puce se trouve au point d'abscisse 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$, *i.e.* $P(A_1 = 1) = \frac{1}{2}$, au point d'abscisse 2 avec probabilité $\frac{1}{4}$, *i.e.* $P(A_1 = 2) = \frac{1}{4}$ et au point d'abscisse 3 avec probabilité $\frac{1}{4}$, *i.e.* $P(A_1 = 3) = \frac{1}{4}$.
Je récapitule la loi de la variable aléatoire A_1 dans le tableau suivant :

k	1	2	3
$P(A_1 = k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

Alors en me servant de la loi de A_1, je calcule son espérance :

$$E(A_1) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{4} + 3 \times \frac{1}{4} = \frac{2+2+3}{4} = \frac{7}{4}.$$

Pour calculer la variance, je commence par calculer $E\left(A_1^2\right)$ à l'aide du théorème de transfert :

$$E\left(A_1^2\right) = 1^2 \times \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{4} + 3^2 \times \frac{1}{4} = \frac{2+4+9}{4} = \frac{15}{4}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens,

$$V(A_1) = E\left(A_1^2\right) - E(A_1)^2 = \frac{15}{4} - \left(\frac{7}{4}\right)^2 = \frac{60}{16} - \frac{49}{16} = \frac{11}{16}.$$

2. a) À chaque saut, la puce se déplace d'un nombre d'unités compris entre 1 et 3. Après deux sauts, elle s'est donc déplacée d'au moins $1+1 = 2$ unités et d'au plus $3+3 = 6$ unités. Toutes les valeurs intermédiaires sont aussi atteignables, donc le support de A_2, position après le deuxième saut, est donné par

$$A_2(\Omega) = [\![2,6]\!].$$

Pour calculer les probabilités, je décompose selon chacun des deux sauts, en notant le nombre d'unités sautées par la puce à chaque saut :

$$[A_2 = 2] = \{(1,1)\}, \qquad [A_2 = 3] = \{(1,2),(2,1)\}, \qquad [A_2 = 4] = \{(1,3),(2,2),(3,1)\},$$

$$[A_2 = 5] = \{(2,3),(3,2)\} \quad \text{et} \quad [A_2 = 6] = \{(3,3)\}.$$

Puis comme les sauts sont indépendants,

$$\begin{aligned}
P(A_2=2) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{4},\\
P(A_2=3) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4},\\
P(A_2=4) &= \frac{1}{2}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{8}+\frac{1}{16}+\frac{1}{8}=\frac{5}{16},\\
P(A_2=5) &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}+\frac{1}{16}=\frac{1}{8},\\
P(A_2=6) &= \frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}.
\end{aligned}$$

Je récapitule la loi de la variable aléatoire A_2 dans le tableau suivant :

k	2	3	4	5	6
$P(A_2=k)$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{16}$

b) En me servant de la loi de A_2, je calcule son espérance :

$$E(A_2)=2\times\frac{1}{4}+3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{5}{16}+5\times\frac{1}{8}+6\times\frac{1}{16}=\frac{4+6+10+5+3}{8}=\frac{28}{8}=\frac{7}{2}.$$

3. a) La variable aléatoire Z_2 compte le nombre de fois où la puce saute de trois unités lors des deux premiers sauts. Donc le support de Z_2 est donné par $\{0,1,2\}$.
Grâce au détail des sauts établi à la question **2.a)**, je peux aisément calculer les probabilités de la loi du couple (A_2,Z_2).

$P(A_2=2,Z_2=0)=P(A_2)=\frac{1}{4}$, $P(A_2=2,Z_2=1)=0$, $P(A_2=2,Z_2=2)=0$,

$P(A_2=3,Z_2=0)=P(A_3)=\frac{1}{4}$, $P(A_2=3,Z_2=1)=0$, $P(A_2=3,Z_2=2)=0$,

$P(A_2=4,Z_2=0)=\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}$, $P(A_2=4,Z_2=1)=\frac{1}{8}+\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$, $P(A_2=4,Z_2=2)=0$,

$P(A_2=5,Z_2=0)=0$, $P(A_2=5,Z_2=1)=P(A_5)=\frac{1}{8}$, $P(A_2=5,Z_2=2)=0$,

$P(A_2=6,Z_2=0)=0$, $P(A_2=6,Z_2=1)=0$, $P(A_2=6,Z_2=2)=P(A_6)=\frac{1}{16}$.

Je récapitule la loi du couple (A_2,Z_2) dans le tableau suivant :

	$A_2=2$	$A_2=3$	$A_2=4$	$A_2=5$	$A_2=6$
$Z_2=0$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{16}$	0	0
$Z_2=1$	0	0	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{8}$	0
$Z_2=2$	0	0	0	0	$\frac{1}{16}$

La loi de Z_2 s'obtient en additionnant les probabilités figurant sur chaque ligne du tableau ci-dessus :

$$P(Z_2=0)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{16}=\frac{9}{16},\qquad P(Z_2=1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{3}{8}\quad\text{et}\quad P(Z_2=2)=\frac{1}{16}.$$

Je récapitule alors la loi de la variable aléatoire Z_2 dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(Z_2=k)$	$\frac{9}{16}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{16}$

En me servant de la loi de Z_2, je calcule son espérance :

$$E(Z_2)=0\times\frac{9}{16}+1\times\frac{3}{8}+2\times\frac{1}{16}=\frac{3+1}{8}=\frac{4}{8}=\frac{1}{2}.$$

b) Pour calculer la covariance $\text{Cov}(A_2,Z_2)$, je commence par calculer l'espérance du produit $E\big(A_2Z_2\big)$, en me servant de la loi du couple $\big(A_2,Z_2\big)$:

$$E\big(A_2Z_2\big)=1\times4\times\frac{1}{4}+1\times5\times\frac{1}{8}+2\times6\times\frac{1}{16}=\frac{8+5+6}{8}=\frac{19}{8}.$$

Puis d'après la formule de König-Huygens, comme $E(A_2)=\dfrac{7}{2}$ et $E(Z_2)=\dfrac{1}{2}$,

$$\text{Cov}(A_2,Z_2)=E\big(A_2Z_2\big)-E(A_2)\times E(Z_2)=\frac{19}{8}-\frac{7}{2}\times\frac{1}{2}=\frac{19-2\times7}{8}=\frac{5}{8}.$$

Si A_2 et Z_2 étaient indépendantes, alors la covariance serait nulle. Or ce n'est pas le cas. Donc les variables aléatoires A_2 et Z_2 ne sont pas indépendantes.

4. Le programme suivant simule les 100 premiers déplacements de la puce :

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
A=np.zeros(100)
for k in range(100):
    t=rd.randint(1,5)
    if t<=2:
        A[k]=1
    if t==3:
        A[k]=2
    if t==4:
        A[k]=3
print(A)
```

En effet, à chaque tour de boucle, la variable `t` prend pour valeur un nombre entier choisi au hasard entre 1 et 4. Ce nombre est inférieur ou égal à 2 avec probabilité $\dfrac{1}{2}$, il est égal à 3 avec probabilité $\dfrac{1}{4}$ et il est égal à 4 avec probabilité $\dfrac{1}{4}$.
La variable `A[k]`, correspondant au nombre d'unités dont la puce se déplace au tour k, vaut alors 1, 2 ou 3 selon la valeur de `t`, avec les probabilités adéquates.

5. Il s'agit de n répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "la puce se déplace d'une unité vers la droite", de probabilité $p=\dfrac{1}{2}$. Comme la variable aléatoire X_n compte le nombre de succès, alors elle suit une loi binomiale de paramètres n et $p=\dfrac{1}{2}$.

De la même manière, Y_n compte le nombre de succès "la puce se déplace de deux unités vers la droite", de probabilité $p=\dfrac{1}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.
Donc Y_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p=\dfrac{1}{4}$.

Et Z_n compte le nombre de succès "la puce se déplace de trois unités vers la droite", de probabilité $p = \frac{1}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.
Donc Z_n suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{1}{4}$.

Enfin, à chaque instant, la probabilité que la puce se déplace d'une ou deux unités vaut $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$. Ainsi la somme $X_n + Y_n$ compte le nombre de succès "la puce se déplace d'une ou deux unités vers la droite", de probabilité $p = \frac{3}{4}$, lors de ces mêmes répétitions.
Donc $X_n + Y_n$ suit une loi binomiale de paramètre n et $p = \frac{3}{4}$.

6. a) À chaque instant, la puce se déplace forcément d'une, de deux ou de trois unités, donc la somme $X_n + Y_n + Z_n$ est égale au nombre total de déplacements à l'issue des n sauts,

$$\textit{i.e.} \quad X_n + Y_n + Z_n = n.$$

Grâce à cette identité, j'obtiens que $X_n + Y_n = n - Z_n$ et donc, par linéarité à droite de la covariance, que

$$\mathrm{Cov}\big(Z_n, X_n + Y_n\big) = \mathrm{Cov}(Z_n, n - Z_n) = \mathrm{Cov}(Z_n, n) - \mathrm{Cov}(Z_n, Z_n) = 0 - V(Z_n) = -V(Z_n).$$

Comme Z_n suit une loi binomiale, alors $V(Z_n) = np(1-p) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16}$ et donc

$$\mathrm{Cov}\big(Z_n, X_n + Y_n\big) = -\frac{3n}{16}.$$

b) Je sais que $V\big(X_n + Y_n\big) = V(X_n) + V(Y_n) + 2\,\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)$. Et comme X_n, Y_n et $X_n + Y_n$ suivent des lois binomiales, alors

$$V(X_n) = n \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{n}{4}, \qquad V(Y_n) = n \times \frac{1}{4} \times \frac{3}{4} = \frac{3n}{16} \quad \text{et} \quad V\big(X_n + Y_n\big) = n \times \frac{3}{4} \times \frac{1}{4} = \frac{3n}{16}.$$

Finalement, j'obtiens que

$$\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = \frac{V\big(X_n + Y_n\big) - V(X_n) - V(Y_n)}{2} = \frac{\frac{3n}{16} - \frac{n}{4} - \frac{3n}{16}}{2} = -\frac{n}{8}.$$

c) Je connais désormais toutes les valeurs impliquées dans la formule du coefficient de corrélation linéaire. Il me suffit alors de remplacer :

$$\rho(X_n, Y_n) = \frac{\mathrm{Cov}(X_n, Y_n)}{\sqrt{V(X_n) \times V(Y_n)}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\sqrt{\frac{n}{4} \times \frac{3n}{16}}} = \frac{-\frac{n}{8}}{\frac{n\sqrt{3}}{2\times 4}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

7. a) Comme X_n compte le nombre de sauts d'une unité, Y_n, le nombre de sauts de deux unités et Z_n, le nombre de sauts de trois unités, alors A_n, abscisse du point occupé par la puce après n sauts, vérifie

$$A_n = X_n + 2Y_n + 3Z_n.$$

Et donc par linéarité de l'espérance,

$$E(A_n) = E(X_n) + 2 \times E(Y_n) + 3 \times E(Z_n) = \frac{n}{2} + 2 \times \frac{n}{4} + 3 \times \frac{n}{4} = \frac{(2 + 2 + 3) \times n}{4} = \frac{7n}{4}.$$

b) J'ai montré à la question **6.a)** que $X_n + Y_n + Z_n = n, \quad i.e.\ Z_n = n - X_n - Y_n.$ Donc

$$A_n = X_n + 2 \times Y_n + 3 \times \big(n - X_n - Y_n\big) = X_n + 2Y_n + 3n - 3X_n - 3Y_n = 3n - 2X_n - Y_n.$$

Alors d'après les propriétés de la variance,

$$\begin{aligned} V(A_n) &= V\big(3n - (2X_n + Y_n)\big) = (-1)^2 V\big(2X_n + Y_n\big) = V(2X_n) + V(Y_n) + 2\operatorname{Cov}(2X_n, Y_n) \\ &= 2^2 V(X_n) + V(Y_n) + 2 \times 2\operatorname{Cov}(X_n, Y_n) = 4V(X_n) + V(Y_n) + 4\operatorname{Cov}(X_n, Y_n). \end{aligned}$$

Finalement, en utilisant les résultats de la question **6.b)**,

$$V(A_n) = 4 \times \frac{n}{4} + \frac{3n}{16} + 4 \times \left(-\frac{n}{8}\right) = n + \frac{3n}{16} - \frac{n}{2} = \frac{3n}{16} + \frac{8n}{16} = \frac{11n}{16}.$$

Par un raisonnement similaire,

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}(A_n, X_n) &= \operatorname{Cov}\big(3n - 2X_n - Y_n, X_n\big) = \operatorname{Cov}(3n, X_n) - 2\operatorname{Cov}(X_n, X_n) - \operatorname{Cov}(Y_n, X_n) \\ &= 0 - 2V(X_n) - \operatorname{Cov}(X_n, Y_n) = -2 \times \frac{n}{4} + \frac{n}{8} = -\frac{3n}{8}. \end{aligned}$$

8. Le tableau `A` contient le nombre d'unités sautées par la puce à chacune de ses 100 premiers sauts. Par construction, le tableau `y` contient alors les abscisses de chaque point occupé par la puce lors de ses 100 premiers sauts. L'exécution du programme `Python` crée donc une ligne brisée représentant le déplacement de la puce lors des 100 premiers sauts.
L'abscisse de chacun des 100 points est le numéro k du saut et l'ordonnée est l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue du k-ème saut.