DEVOIR SURVEILLÉ 3

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 4 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage !

Exercice 1 – Pour tout couple (a,b) de $\mathbb{R}^2$, soit M la matrice carrée d'ordre 2 définie par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix}.$$

1. Dans cette question, on choisit $a = b = -1$.
   a) La matrice M est-elle inversible ?
   b) Calculer pour tout entier $n \geqslant 2$, la matrice M^n.
2. Dans cette question, on choisit $a = b$.
   a) La matrice M est-elle inversible ?
   b) Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a $M^n = (1+a)^{n-1}M$.
3. On revient au cas général où a et b sont des réels quelconques.
   Montrer que la matrice M est inversible si et seulement si $a \neq b$.
4. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi géométrique de paramètre p avec $0 < p < 1$. On pose $q = 1 - p$.
   Soit N la matrice définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : "la matrice N est inversible".
   a) Établir la relation $P(X = Y) = \sum_{k=1}^{+\infty} P(X = k) \times P(Y = k)$.
   b) Calculer $\sum_{k=1}^{+\infty} p^2 q^{2k-2}$.
   c) En déduire $P(A)$ en fonction de q.
5. Soit n un entier supérieur ou égal à 1. Dans cette question, on considère deux variables aléatoires X et Y indépendantes et suivant toutes les deux la loi binomiale de paramètres n et $\frac{1}{2}$.
   Soit N la matrice définie par $N = \begin{pmatrix} 1 & X \\ 1 & Y \end{pmatrix}$ et A l'événement : "la matrice N est inversible".
   a) Pour x réel, écrire les développements de $(x+1)^n$ et $(x+1)^{2n}$ à l'aide de la formule du binôme.
   b) En utilisant l'identité $(x+1)^{2n} = (x+1)^n(x+1)^n$, montrer que l'on a

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}\binom{n}{n-k}.$$

c) En déduire la relation $P(X = Y) = \dfrac{1}{4^n}\dbinom{2n}{n}$.

d) Calculer $P(A)$ en fonction de n.

Exercice 2 –

Soit M une matrice carrée d'ordre 3 et I la matrice unité d'ordre 3. On pose par convention : $M^0 = I$.

On se propose d'étudier la suite réelle $(u_n)_{n\geqslant 0}$ définie par :

$$u_0 = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 1 \quad \text{et pour tout entier naturel } n, \quad u_{n+3} = 2u_{n+2} - \frac{5}{4}u_{n+1} + \frac{1}{4}u_n.$$

Soit A la matrice carrée d'ordre 3 telle que $A = \dfrac{1}{4}\begin{pmatrix} 8 & -5 & 1 \\ 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ et pour tout entier naturel n, soit X_n la matrice à trois lignes et une colonne définie par $X_n = \begin{pmatrix} u_{n+2} \\ u_{n+1} \\ u_n \end{pmatrix}$.

1. Déterminer X_0 et X_1.
2. a) Justifier pour tout entier naturel n, l'égalité $X_{n+1} = AX_n$.

   b) À l'aide d'un raisonnement par récurrence, en déduire pour tout entier naturel n, la relation $X_n = A^n X_0$.
3. Soit P, Q et T les matrices suivantes :

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}, \qquad Q = \begin{pmatrix} 16 & -16 & 4 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad T = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   a) Calculer le produit PQ. En déduire que la matrice P est inversible et déterminer sa matrice inverse P^{-1}.

   b) Calculer les produits PT et AP. En déduire que $A = PTP^{-1}$, puis pour tout entier naturel n, l'égalité $A^n = PT^nP^{-1}$.
4. Soit D la matrice définie par $D = \dfrac{1}{2}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. On pose $N = T - D$.

   a) Déterminer pour tout entier $k \geqslant 2$, la matrice N^k.

   b) Vérifier que $DN = ND$ et montrer que pour tout entier naturel n, on a

$$T^n = \left(\frac{1}{2}\right)^n \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

   c) En déduire pour tout entier naturel n, l'expression de la matrice A^n.
5. a) Déduire des questions précédentes l'expression de u_n en fonction de n.

   b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.

Exercice 3 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \ln\left(1+u_n^2\right)$.

1. Compléter la fonction `Python` suivante pour qu'elle calcule et retourne u_n pour un entier n :

```
import numpy as np
def calculu(n):
    u=......
    for k in range(n):
        u=......
    return u
```

2. Établir pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'encadrement suivant : $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant 1$.
3. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs réelles, telle que $f(x) = \ln\left(1+x^2\right) - x$.
   a) Dresser le tableau de variation de f puis déterminer le signe de $f(x)$ sur l'intervalle $[0,1]$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante.
   c) Montrer que la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.
4. a) Justifier pour tout réel $x \geqslant 0$, l'inégalité $\quad \ln(1+x) \leqslant x$.
   b) Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, établir l'inégalité $\quad u_{n+1} \leqslant u_n^2$.
   c) En déduire pour tout entier $n \geqslant 1$, l'inégalité $\quad u_n \leqslant \left(\ln 2\right)^n$.
   d) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\geqslant 0}$.
   e) On considère le programme `Python` suivant :

```
import numpy as np
n=0
u=1
while u>=0.0001:
    u=np.log(1+u**2)
    n=n+1
print(n)
```

   On exécute ce programme. Le résultat affiché est 6.
   Quelle est la signification de ce résultat ?
5. Établir pour tout entier $n \geqslant 2$, l'inégalité $\quad \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} u_k \leqslant \frac{1-\left(\ln 2\right)^n}{1-\ln 2}$.

Exercice 4 – Une puce se déplace sur un axe gradué. À l'instant 0, la puce se trouve sur le point d'abscisse 0. À partir de l'instant 0, la puce effectue à chaque instant, un saut vers la droite selon le protocole suivant :

- elle effectue un saut d'une unité vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{2}$,
- elle effectue un saut de deux unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$,
- elle effectue un saut de trois unités vers la droite avec la probabilité $\frac{1}{4}$.

Les différents sauts sont supposés indépendants.

Pour tout entier $n \geqslant 1$, on définit les variables aléatoires suivantes :

- X_n est égale au nombre de sauts d'une unité effectués lors des n premiers sauts,
- Y_n est égale au nombre de sauts de deux unités effectués lors des n premiers sauts,
- Z_n est égale au nombre de sauts de trois unités effectués lors des n premiers sauts,
- A_n est égale à l'abscisse du point occupé par la puce à l'issue de son n-ième saut.

1. Donner la loi de la variable aléatoire A_1. Calculer $E(A_1)$ et $V(A_1)$.
2. a) Justifier que $A_2(\Omega) = [\![2,6]\!]$. Montrer que la loi de A_2 est donnée par

$$P\big(A_2 = 2\big) = \frac{1}{4}, \quad P\big(A_2 = 3\big) = \frac{1}{4}, \quad P\big(A_2 = 4\big) = \frac{5}{16}, \quad P\big(A_2 = 5\big) = \frac{1}{8}, \quad P\big(A_2 = 6\big) = \frac{1}{16}.$$

   b) Calculer $E(A_2)$.
3. a) Présenter dans un tableau la loi du couple $\big(A_2, Z_2\big)$.
   En déduire la loi de Z_2 ainsi que l'espérance de Z_2.

   b) Calculer la covariance $\mathrm{Cov}\big(A_2, Z_2\big)$ de A_2 et Z_2.
   Les variables aléatoires A_2 et Z_2 sont-elles indépendantes ?
4. On suppose avoir importé la librairie `numpy.random` sous l'abréviation `rd`.
   On rappelle qu'en `Python`, l'instruction `rd.randint(1,5)` simule une variable aléatoire suivant la loi discrète uniforme sur $[\![1,4]\!]$.
   Compléter le programme suivant pour qu'il simule les 100 premiers déplacements de la puce.

```
import numpy as np
import numpy.random as rd
A=np.zeros(100)
for k in range(100):
    t=rd.randint(1,5)
    if t<=......:
        A[k]=1
    if t==......:
        A[k]=2
    if t==......:
        A[k]=3
print(A)
```

5. Reconnaître les lois de X_n, Y_n et Z_n. Justifier que $X_n + Y_n$ suit la loi binomiale $\mathcal{B}\left(n, \dfrac{3}{4}\right)$.
6. a) Justifier la relation $X_n + Y_n + Z_n = n$. Calculer $\mathrm{Cov}(Z_n, X_n + Y_n)$.

   b) En utilisant les valeurs de $V(X_n)$, $V(Y_n)$ et $V(X_n + Y_n)$, montrer que $\mathrm{Cov}(X_n, Y_n) = -\dfrac{n}{8}$.

   c) Calculer le coefficient de corrélation linéaire $\rho(X_n, Y_n)$ de X_n et Y_n.
7. a) Exprimer A_n en fonction de X_n, Y_n et Z_n. Montrer que $E(A_n) = \dfrac{7n}{4}$.

   b) Exprimer A_n en fonction de X_n et Y_n. Calculer $V(A_n)$ et $\mathrm{Cov}(A_n, X_n)$.
8. On suppose avoir importé la bibliothèque `matplotlib.pyplot` sous l'abréviation `plt`.
   On rappelle que si $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ et $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ sont deux vecteurs de même taille, la commande `plt.plot(x,y)` permet de tracer la ligne brisée joignant les points $M_1(x_1, y_1)$, $M_2(x_2, y_2), \ldots, M_n(x_n, y_n)$.
   On complète le programme `Python` de la question **4.** en y ajoutant les lignes suivantes :

```
import matplotlib.pyplot as plt
x=np.arange(1,101,1)
y=np.zeros(100)
for k in range(1,100):
    y[k]=y[k-1]+A[k]
plt.plot(x,y)
```

   Quelle sortie graphique obtient-on ?