DEVOIR SURVEILLÉ 3

Exercice 1 – [BSB 2019 / Ex1]

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

   Initialisation : Pour $n = 0$,
   $$A^0 = I_3 \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 2^0 & 0 & 3^0 - 2^0 \\ 0 & 3^0 & 0 \times 3^{0-1} \\ 0 & 0 & 3^0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1-1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$
   Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors
   $$A^{n+1} = A \times A^n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \times 2^n & 0 & 2\left(3^n - 2^n\right) + 3^n \\ 0 & 3 \times 3^n & 3 \times n3^{n-1} + 3^n \\ 0 & 0 & 3 \times 3^n \end{pmatrix}$$
   $$= \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3 \times 3^n - 2 \times 2^n \\ 0 & 3^{n+1} & n3^n + 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} & 0 & 3^{n+1} - 2^{n+1} \\ 0 & 3^{n+1} & (n+1) \times 3^n \\ 0 & 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.$$
   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*
   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix}.$$

2. a) L'instruction manquante est `a=2*a+3**i`. En effet, comme les valeurs de i vont de 0 à $n-1$, à chaque itération le terme a_{i+1} est calculé : pour cela, il faut sommer le double du terme précédent $2a_i$ avec la puissance de 3 correspondant à cet indice, *i.e.* 3^i.

   b) Soit $n \in \mathbb{N}$. Je calcule le produit AX_n :
   $$AX_n = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a_n + 3^n \\ 3b_n + 3^n \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \\ 3^{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$
   Ainsi j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $X_{n+1} = AX_n$.

   c) Voici le programme complété.

```
1.  import numpy as np
2.  def calculbisa(n):
3.      A=np.array([[2,0,1],[0,3,1],[0,0,3]])
4.      X=np.array([[2],[0],[1]])
5.      for i in range(n):
6.          X=np.dot(A,X)
7.      return X[0]
```

d) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $X_n = A^n X_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 X_0 = I_3 X_0 = X_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^n X_0 = A^{n+1} X_0.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad X_n = A^n X_0.$$

e) D'après les questions précédentes,

$$X_n = A^n X_0 \iff \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 3^n - 2^n \\ 0 & 3^n & n3^{n-1} \\ 0 & 0 & 3^n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1} + 3^n - 2^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n + 3^n \\ n3^{n-1} \\ 3^n \end{pmatrix}.$$

Ainsi j'ai bien montré en particulier que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n = 2^n + 3^n \quad \text{et} \quad b_n = n3^{n-1}.$$

3. a) Je calcule le produit PQ :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1-1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

Comme $P \times Q = I_3$, j'en déduis que la matrice P est inversible et que

$$P^{-1} = Q = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

b) Je calcule le produit PM avant de multiplier le résultat par P^{-1} :

$$P \times M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 4 & 0 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -4+1 & 0 & 2+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$PM \times P^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \\ -3 & 0 & 3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 0 & 1 \\ 1-1 & 3 & 1 \\ 3-3 & 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = A.$$

Ainsi j'ai bien montré que $PMP^{-1} = A$.

c) Avant de passer à la récurrence proprement dite, il me faut montrer que $M = P^{-1}AP$. Il s'agit d'une conséquence directe de la question précédente : comme $PMP^{-1} = A$, alors en multipliant à gauche par P^{-1} et à droite par P, j'obtiens que

$$P^{-1}AP = P^{-1} \times PMP^{-1} \times P = I_3 \times M \times I_3 = M.$$

Je raisonne alors par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $M^n = P^{-1}A^nP$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$M^0 = I_3 \quad \text{et} \quad P^{-1}A^0P = P^{-1}I_3P = P^{-1}P = I_3.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi. Alors

$$M^{n+1} = M^n \times M = P^{-1}A^nP \times P^{-1}AP = P^{-1}A^n \times AP = P^{-1}A^{n+1}P.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad M^n = P^{-1}A^nP.$$

Comme je connais les matrices P^{-1}, A^n et P, il ne me reste plus qu'à calculer le produit :

$$\begin{aligned}
A^n \times P &= \begin{pmatrix} -3^n+2^n & 0 & -2^n+3^n-2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n-3^n & 0 & 3^n-2\times 2^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -3^n & 0 & 3^n \end{pmatrix} \\
P^{-1} \times A^nP &= \begin{pmatrix} -2^n+3^n+3^n & 0 & -3^n+2\times 2^n-3^n \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ -2^n+3^n & 0 & -3^n+2\times 2^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 3^n-2^n & 0 & 2(2^n-3^n) \\ -n3^{n-1} & 3^n & n3^{n-1} \\ 3^n-2^n & 0 & 2^{n+1}-3^n \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Je retrouve bien, pour la matrice M^n et tout entier $n \in \mathbb{N}$, l'expression donnée par l'énoncé.

4. a) D'après la définition de la suite $(b_n)_{n\geqslant 0}$, pour tout $k \in \mathbb{N}$, $b_{k+1} = 3b_k + 3^k$. Ainsi

$$b_{k+1} - b_k - 3^k = 3b_k + 3^k - b_k - 3^k = 2b_k.$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $k \in \mathbb{N}$, $2b_k = b_{k+1} - b_k - 3^k$.

b) Je reconnais la somme des $n+1$ premières puissances de 3. Alors

$$\sum_{k=0}^{n} 3^k = \frac{1-3^{n+1}}{1-3} = \frac{1-3^{n+1}}{-2} = \frac{3^{n+1}-1}{2}.$$

c) Je reconnais une somme télescopique. Ici, seuls les deux termes extrêmes vont rester. Ainsi

$$\sum_{k=0}^{n} \left(b_{k+1} - b_k\right) = \cancel{b_1} - b_0 + \cancel{b_2} - \cancel{b_1} + \cancel{\cdots} + \cancel{b_n} - \cancel{b_{n-1}} + b_{n+1} - \cancel{b_n} = b_{n+1} - b_0 = b_{n+1}.$$

En effet, comme $b_0 = 0$, j'obtiens bien le résultat souhaité.

d) En assemblant les résultats des questions précédentes, j'obtiens bien l'égalité désirée :

$$\begin{aligned}
\sum_{k=0}^{n} k3^{k-1} &= \sum_{k=0}^{n} b_k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2} \times \left(b_{k+1} - b_k - 3^k\right) = \frac{1}{2} \times \left(\sum_{k=0}^{n} \left(b_{k+1} - b_k\right) - \sum_{k=0}^{n} 3^k\right) \\
&= \frac{1}{2} \times \left(b_{n+1} - \frac{3^{n+1}-1}{2}\right) = \frac{b_{n+1}}{2} + \frac{1-3^{n+1}}{4} = \frac{(n+1)3^n}{2} + \frac{1}{4} - \frac{3^{n+1}}{4}.
\end{aligned}$$

Exercice 2 – [BSB 2019 / Ex2]

1. Pour calculer la limite en $-\infty$, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} 1+e^x = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0.$$

   J'en déduis que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une asymptote horizontale, au voisinage de $-\infty$, d'équation $y = 0$.

2. a) Je pars de l'expression $\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ et je multiplie numérateur et dénominateur par e^x pour retrouver l'expression de $f(x)$:

$$\frac{1}{1+e^{-x}} = \frac{1\times e^x}{(1+e^{-x})\times e^x} = \frac{e^x}{e^x+e^0} = \frac{e^x}{1+e^x} = f(x).$$

   J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R},\quad f(x) = \dfrac{1}{1+e^{-x}}$.

   b) Grâce à cette nouvelle expression, je calcule la limite de f en $+\infty$:

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 1 = 1\\ \lim\limits_{x\to+\infty} 1+e^{-x} = 1+0 = 1\end{array}\right\}\text{ Par quotient,}\quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = 1.$$

   J'en déduis alors que la représentation graphique $\mathcal{C}$ de f admet une seconde asymptote horizontale, au voisinage de $+\infty$, d'équation $y = 1$.

3. a) La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = e^x$ et $v(x) = 1+e^x$.
   Puisque $u'(x) = e^x$ et $v'(x) = e^x$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{e^x\times\left(1+e^x\right)-e^x\times e^x}{\left(1+e^x\right)^2} = \frac{e^x}{\left(1+e^x\right)^2}.$$

   J'ai bien montré que pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f'(x) = \dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$.

   b) Les variations de la fonction f s'obtiennent en étudiant le signe de $f'(x)$. Ici, le signe est immédiat puisque le dénominateur est un carré et le numérateur, une exponentielle. Ainsi pour tout $x\in\mathbb{R},\quad f'(x) > 0\quad$ et donc la fonction f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. En outre,

$$f(0) = \frac{e^0}{1+e^0} = \frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}.$$

   D'où le tableau de variation suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
f	0	$\nearrow$ $\frac{1}{2}$ $\nearrow$	1

   c) L'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a)\times(x-a)+f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation devient

$$y = f'(0)\times(x-0)+f(0).$$

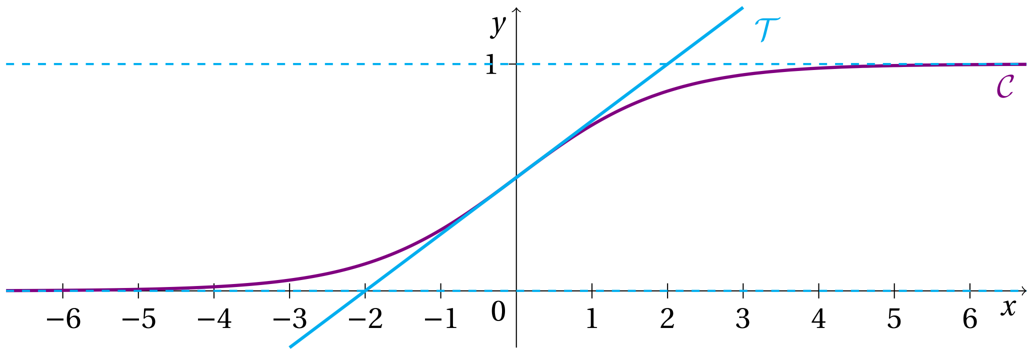
Or

$$f(0) = \frac{1}{2} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{e^0}{\left(1+e^0\right)^2} = \frac{1}{\left(1+1\right)^2} = \frac{1}{4}.$$

Finalement l'équation de $\mathcal{T}$ est donnée par

$$y = \frac{1}{4}x + \frac{1}{2}.$$

4. La convexité de f s'obtient en étudiant le signe de la dérivée seconde $f''(x)$.
   Ici l'énoncé me donne $f''(x) = \dfrac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$ et comme $\forall x \in \mathbb{R}, \quad e^x > 0 \quad$ et $\quad (1+e^x) > 0$, j'en déduis que le signe de $f''(x)$ est donné par celui de $(1-e^x)$.
   Or $1 - e^x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant e^x \iff 0 \geqslant x$, donc j'en déduis que la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 0[$ puis concave sur l'intervalle $]0, +\infty[$.
   Le point de coordonnées $\left(0, \dfrac{1}{2}\right)$ est point d'inflexion : la tangente en ce point, calculée précédemment, traverse la courbe en ce point.
5. La courbe admet deux asymptotes horizontales, je connais l'équation de la tangente à la courbe en 0. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



Exercice 3 – [BSB 2019 / Ex3]

1. Si la pièce amène FACE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et la boule tirée est rouge avec probabilité $\dfrac{1}{2}$. Ainsi $P_F(R_1) = \dfrac{1}{2}$.
   Au contraire, si la pièce amène PILE, alors le premier tirage s'effectue dans l'urne $\mathcal{U}_1$ et la boule tirée est rouge avec probabilité 1. Autrement dit, $P_{\overline{F}}(R_1) = 1$.
   Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer une boule rouge est donnée par

$$P(R_1) = P\left(F \cap R_1\right) + P\left(\overline{F} \cap R_1\right) = P(F) \times P_F(R_1) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}(R_1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{4} + \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

2. a) Si la pièce amène FACE, alors les tirages s'effectuent dans l'urne $\mathcal{U}_2$.
   D'après la formule des probabilités composées,

$$P_F\left(R_1 \cap R_2\right) = P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(R_2) = \frac{2}{4} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

   De même, si la pièce amène PILE, les tirages s'effectuent dans $\mathcal{U}_1$ et

$$P_{\overline{F}}\left(R_1 \cap R_2\right) = P_{\overline{F}}(R_1) \times P_{\overline{F} \cap R_1}(R_2) = 1 \times 1 = 1.$$

Alors d'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, \overline{F}\}$ forme un système complet d'événements, la probabilité de tirer deux boules rouges de suite est donnée par

$$P(R_1 \cap R_2) = P(F) \times P_F\big(R_1 \cap R_2\big) + P(\overline{F}) \times P_{\overline{F}}\big(R_1 \cap R_2\big) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{12} + \frac{1}{2} = \frac{7}{12}.$$

b) Je cherche ici $P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{R_1 \cap R_2}(\overline{F}) = \frac{P\big(\overline{F} \cap R_1 \cap R_2\big)}{P\big(R_1 \cap R_2\big)} = \frac{\frac{1}{2} \times 1}{\frac{7}{12}} = \frac{1}{2} \times \frac{12}{7} = \frac{6}{7}.$$

Si les deux boules tirées sont rouges, la probabilité que la pièce ait amené PILE est $\dfrac{6}{7}$.

3. ***Dans cette question, une erreur présente initialement dans l'énoncé a été corrigée.***

a) Si une boule blanche est tirée en premier, alors je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 1$. Si au contraire une boule rouge est tirée, il peut s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$ et il faut donc faire au moins un autre tirage.
Si ce deuxième tirage donne une boule blanche, alors encore une fois, je sais qu'il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$, donc $Y = 2$. Si au contraire une boule rouge est tirée, alors il peut encore s'agir de l'urne $\mathcal{U}_1$ ou de $\mathcal{U}_2$. Il faut donc refaire un troisième tirage pour déterminer dans quelle urne les tirages ont lieu.
Au troisième tirage, si une boule blanche est tirée, alors il s'agit de l'urne $\mathcal{U}_2$. Cependant, si une boule rouge est tirée alors ce ne peut être que l'urne $\mathcal{U}_1$ puisque seule l'urne $\mathcal{U}_1$ contient plus de deux boules rouges.
Ainsi j'ai montré que le support de Y, ensemble des valeurs prises par la variable aléatoire Y, est donné par $Y(\Omega) = [\![1,3]\!]$.

b) Comme expliqué à la question précédente, l'événement $[Y = 1]$ ne se réalise que lorsqu'une boule blanche est tirée au premier tirage. Ceci n'est possible que si la boule a été tirée dans l'urne $\mathcal{U}_2$ et donc que la pièce a amené FACE.
Ainsi j'ai bien montré que

$$[Y = 1] = F \cap B_1.$$

Alors d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = 1) = P\big(F \cap B_1\big) = P(F) \times P_F(B_1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} = \frac{1}{4}.$$

c) Par un raisonnement similaire à la question précédente, je montre que

$$[Y = 2] = F \cap R_1 \cap B_2.$$

Alors d'après la formule des probabilités composées,

$$P(Y = 2) = P\big(F \cap R_1 \cap B_2\big) = P(F) \times P_F(R_1) \times P_{F \cap R_1}(B_2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{4} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{6}.$$

d) Par complémentarité, comme $\big\{[Y = 1], [Y = 2], [Y = 3]\big\}$ forme un système complet d'événements, j'obtiens que

$$P(Y = 3) = 1 - P(Y = 1) - P(Y = 2) = 1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{6} = \frac{7}{12}.$$

Je remarque qu'il s'agit là de la somme des deux probabilités données dans l'énoncé initial.

e) Je connais désormais la loi de Y donc je peux facilement calculer son espérance :

$$E(Y) = 1 \times P(Y = 1) + 2 \times P(Y = 2) + 3 \times P(Y = 3) = 1 \times \frac{1}{4} + 2 \times \frac{1}{6} + 3 \times \frac{7}{12} = \frac{1}{4} + \frac{1}{3} + \frac{7}{4} = 2 + \frac{1}{3} = \frac{7}{3}.$$

Exercice 4 – [ECRICOME 2020 / Ex1]

Partie A

1. Voici la fonction complétée :

```
def calcul(n):
    u=0
    v=1
    for k in range(n):
        w=u
        u=v
        v=7*u+8*w
    return u
```

2. Pour montrer que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime s_{n+1} en fonction de s_n pour tout entier $n \in \mathbb{N}$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$s_{n+1} = u_{n+2} + u_{n+1} = 7u_{n+1} + 8u_n + u_{n+1} = 8u_{n+1} + 8u_n = 8 \times \left(u_{n+1} + u_n\right) = 8 \times s_n.$$

J'ai bien montré que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 8$.
Je peux alors en donner son expression explicite : comme $s_0 = u_1 + u_0 = 1 + 0 = 1$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad s_n = s_0 \times q^n = 1 \times 8^n = 8^n.$$

3. a) D'après les formules de l'énoncé, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$t_n = v_n - v_{n+1} = (-1)^n u_n - (-1)^{n+1} u_{n+1} = (-1)^n \times \left(u_n + u_{n+1}\right) = (-1)^n \times s_n.$$

b) D'après les questions précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $t_n = (-1)^n \times s_n$ et $s_n = 8^n$. Alors

$$t_n = (-1)^n \times 8^n = (-8)^n.$$

4. a) Il s'agit de la somme des n premières puissances de -8. Alors

$$\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = \frac{1-(-8)^{n-1+1}}{1-(-8)} = \frac{1-(-8)^n}{1+8} = \frac{1}{9} \times \left(1-(-8)^n\right).$$

b) Il s'agit cette fois d'une somme télescopique :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \left(v_i - v_{i+1}\right) = v_0 - \cancel{v_1} + \cancel{v_1} - \cancel{v_2} + \cancel{\cdots} + \cancel{v_{n-2}} - \cancel{v_{n-1}} + \cancel{v_{n-1}} - v_n = v_0 - v_n = -v_n, \qquad \text{car } v_0 = 0.$$

c) D'après les questions précédentes, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = -\sum_{i=0}^{n-1} \left(v_i - v_{i+1}\right) = -\sum_{i=0}^{n-1} t_i = -\sum_{i=0}^{n-1} (-8)^i = -\frac{1}{9} \times \left(1-(-8)^n\right) = \frac{1}{9} \times \left((-8)^n - 1\right).$$

Puis comme $v_n = (-1)^n u_n$, alors $u_n = (-1)^n v_n$ et pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = (-1)^n \times \frac{1}{9} \times \left((-8)^n - 1\right) = \frac{1}{9} \times \left((-1)^n \times (-8)^n - (-1)^n\right) = \frac{1}{9} \times \left(8^n - (-1)^n\right).$$

Enfin comme $-(-1)^n = (-1)^{n+1}$, alors j'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \frac{(-1)^{n+1} + 8^n}{9}.$$

Partie B

1. Je calcule le produit M^2 puis l'expression $M^2-7M-8I$:

$$M^2 = M\times M = \begin{pmatrix} 2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix} 2&3&3\\3&2&3\\3&3&2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4+9+9 & 6+6+9 & 6+9+6\\ 6+6+9 & 9+4+9 & 9+6+6\\ 6+9+6 & 9+6+6 & 9+9+4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 22&21&21\\21&22&21\\21&21&22\end{pmatrix}$$

$$M^2-7M-8I = \begin{pmatrix} 22&23&23\\23&22&23\\23&23&22\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -14&-21&-21\\-21&-14&-21\\-21&-21&-14\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -8&0&0\\0&-8&0\\0&0&-8\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix} = 0_3.$$

2. D'après la question précédente,

$$M^2-7M-8I=0_3 \iff M^2-7M=8I \iff M\times\big(M-7I\big)=8I$$
$$\iff M\times\left(\frac{1}{8}\big(M-7I\big)\right)=I.$$

La matrice M est donc bien inversible et son inverse est donnée par $M^{-1}=\dfrac{1}{8}\big(M-7I\big)$.

3. a) Je calcule chaque côté pour vérifier l'égalité :

$$M^0 = I \quad \text{et} \quad a_0M+b_0I = 0\times M+1\times I = I.$$

Donc l'égalité $M^0=a_0M+b_0I$ est bien vérifiée.

b) De la même façon, en posant $a_1=1$ et $b_1=0$, alors j'obtiens bien que

$$a_1M+b_1I = 1\times M+0\times I = M = M^1.$$

c) En supposant que $M^n=a_nM+b_nI$ pour deux réels a_n et b_n, alors

$$M^{n+1} = M^n\times M = \big(a_nM+b_nI\big)\times M = a_nM^2+b_nM.$$

Or en utilisant le résultat de la question **1.**, puisque $M^2-7M-8I=0_3$ alors $M^2=7M+8I$. En remplaçant M^2 par cette expression, j'obtiens alors

$$M^{n+1} = a_n\big(7M+8I\big)+b_nM.$$

Puis en développant le produit,

$$M^{n+1} = 7a_nM+8a_nI+b_nM = (7a_n+b_n)M+8a_nI,$$

$$\textit{i.e.} \quad M^{n+1}=a_{n+1}M+b_{n+1}I \qquad \text{pour } a_{n+1}=7a_n+b_n \quad \text{et} \quad b_{n+1}=8a_n.$$

d) Les suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont initialisées de la même manière :

$$a_0=u_0=0 \quad \text{et} \quad a_1=u_1=1.$$

L'étape d'initialisation est double puisque la formule de récurrence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fait intervenir u_{n+1}, u_n et u_{n-1}. C'est pourquoi je m'éloigne un peu de la rédaction habituelle.

Et les formules de récurrence des deux suites sont identiques : pour tout $n\in\mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1}=7u_n+8u_{n-1} \quad \text{et} \quad a_{n+1}=7a_n+b_n=7a_n+8a_{n-1}, \text{ puisque } b_{n+1}=8a_n.$$

Alors par récurrence, comme les suites sont initialisées et définies par récurrence de la même manière, les deux suites sont identiques, *i.e.*

$$\forall n\in\mathbb{N}, \quad a_n=u_n.$$

Partie C

1. La somme de toutes les probabilités doit être égale à 1. Or ici, la somme vaut 24β. Donc
$$24\beta = 1 \iff \beta = \frac{1}{24}.$$

2. Pour déterminer les lois marginales, je calcule la somme des probabilités sur chacune des lignes ou des colonnes. J'obtiens alors les tableaux suivants :

k	1	2	3
$P(X=k)$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

k	1	2	3
$P(Y=k)$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$	$8\beta = \frac{1}{3}$

Les deux lois sont identiques (même support et mêmes probabilités) et il s'agit de la loi uniforme sur l'intervalle $[\![1,3]\!]$. Ainsi
$$E(X) = E(Y) = \frac{3+1}{2} = 2.$$

3. a) Je calcule l'espérance du produit XY à l'aide de la loi conjointe :
$$\begin{aligned} E(XY) = &\ 1\times1\times2\beta + 1\times2\times3\beta + 1\times3\times3\beta + 2\times1\times3\beta + 2\times2\times2\beta + 2\times3\times3\beta \\ &+3\times1\times3\beta + 3\times2\times3\beta + 3\times3\times2\beta \\ = &\ \big(2+6+9+6+8+18+9+18+18\big)\beta = 94\beta = \frac{94}{24} = \frac{47}{12}. \end{aligned}$$
Puis d'après la formule de König-Huygens,
$$\operatorname{Cov}(X,Y) = E(XY) - E(X)\times E(Y) = \frac{47}{12} - 2\times 2 = \frac{47}{12} - 4 = \frac{47}{12} - \frac{48}{12} = -\frac{1}{12}.$$

b) Si les deux variables aléatoires X et Y étaient indépendantes, alors la covariance $\operatorname{Cov}(X,Y)$ serait nulle. Or selon la question précédente, ce n'est pas le cas.
Donc les variables aléatoires X et Y ne sont pas indépendantes.