NOM :

INTERRO DE COURS – SEMAINE 4

Exercice 1 – On considère les trois matrices suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Calculer $P \times Q$ et $Q \times P$.

Solution : Je calcule le produit matriciel $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 0 \\ -2+2 & -1+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

De même, je calcule le produit $Q \times P$:

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

2. Vérifier que $QAP = D$, avec $D = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Solution : J'opère le produit QAP en deux étapes :

$$Q \times A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$
$$QA \times P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Je retrouve bien la matrice D de l'énoncé donc $D = QAP$.

3. En déduire que $A = PDQ$.

Solution : Grâce à la question précédente, je sais que $QAP = D$. Ainsi en multipliant à gauche par P et à droite par Q, j'obtiens que

$$P \times D \times Q = P \times QAP \times Q = \underbrace{PQ}_{=I_3} \times A \times \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 \times A \times I_3 = A.$$

J'ai bien montré que $A = PDQ$.

4. Montrer par récurrence que $\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ$.

Solution : Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad A^n = PD^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0, \quad A^0 = I_3 \quad$ et $\quad PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

$$A^{n+1} = A^n \times A$$

avec $A = PDQ$, et par hypothèse de récurrence je sais que $A^n = PD^nQ$.
Donc

$$A^{n+1} = PD^nQ \times PDQ = PD^n(QP)DQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad A^n = PD^nQ.$$

5. Calculer A^n.

Solution : Je sais désormais que $A^n = PD^nQ$ et je connais l'expression des trois matrices P, D et Q. Je n'ai plus qu'à calculer la puissance n-ième de D, facilement puisqu'il s'agit d'une matrice diagonale, puis effectuer les produits matriciels.
Comme la matrice D est diagonale,

$$D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors

$$PD^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ 2-2^{n+1} & 2-2^n & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$