CONCOURS BLANC 3

Exercice 1 – [ECRICOME 2011 / Ex2]

Partie I.

1. Je calcule N^2 :

$$N^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

Et donc pour tout entier $k \geqslant 2$, $\quad N^k = N^2 \times N^{k-2} = 0_3 \times N^{k-2} = 0_3$.

2. a) Je calcule les produits PQ et QP :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 & 0 \\ -2+2 & -1+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3,$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 0 & 2-2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3.$$

b) Je calcule le produit $Q \times \Delta$ puis $Q\Delta \times P$:

$$Q \times \Delta = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6-2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -3+2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$Q\Delta \times P = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4-2 & 0 & 4-4 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1+1 & 0 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = D.$$

Je retrouve bien la matrice D introduite dans l'énoncé.

c) Je sais que $Q\Delta P = D$. En multipliant à gauche par P et à droite par Q, j'obtiens que

$$PDQ = P \times Q\Delta P \times Q = \underbrace{PQ}_{=I_3} \times \Delta \times \underbrace{PQ}_{=I_3} = I_3 \times \Delta \times I_3 = \Delta.$$

J'ai ainsi montré que $\Delta = PDQ$.

d) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad \Delta^n = PD^nQ$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $\quad \Delta^0 = I_3 \quad$ et $\quad PD^0Q = PI_3Q = PQ = I_3$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $\Delta^n = PD^nQ$. Alors

$$\Delta^{n+1} = \Delta^n \times \Delta = PD^nQ \times PDQ = PD^nI_3DQ = PD^nDQ = PD^{n+1}Q.$$

Donc $\Delta^{n+1} = PD^{n+1}Q$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \Delta^n = PD^nQ.$$

e) Comme la matrice D est diagonale, alors $D^n = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1^n & 0 \\ 0 & 0 & 1^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Or d'après la question précédente, $\Delta^n = PD^nQ$. Donc je calcule les produits :

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Delta^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 2^n & 0 & 1 \\ -2^n & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

3. a) Je calcule les produits ΔN et $N\Delta$:

$$\Delta \times N = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3+2 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$N \times \Delta = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

J'ai bien montré que $\Delta N = N\Delta$, et je remarque aussi que $\Delta N = N\Delta = N$.

b) Les matrices Δ et N commutent d'après la question précédente donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $A = \Delta + N$:

$$A^n = (\Delta + N)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} N^k \Delta^{n-k}.$$

Or d'après la question **1.**, pour tout $k \geqslant 2$, le terme de la somme est nul puisque $N^k = 0_3$. Ainsi pour $n \geqslant 1$,

$$A^n = \binom{n}{0} N^0 \Delta^n + \binom{n}{1} N^1 \Delta^{n-1} = \Delta^n + nN\Delta^{n-1}.$$

c) Grâce à la formule précédente et à l'expression de Δ^n en fonction de n, j'obtiens que

$$A^n = \Delta^n + nN\Delta^{n-1} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + n \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

En effet, à la question **2.a)**, j'ai remarqué que $N\Delta = N$, donc $N\Delta^{n-1} = N$. Finalement

$$A^n = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & 0 \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & -n \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{n+1}-1 & 2^n-1 & -n \\ -2^{n+1}+2 & -2^n+2 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Partie II.

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_{n+1} = z_n$. Donc la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est constante.
   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$, $z_n = z_0 = 1$.

   b) En remplaçant z_n par 1 dans les expressions de l'énoncé, j'obtiens que

$$x_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 \quad \text{et} \quad y_{n+1} = -2x_n + 2.$$

2. a) J'exprime $r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $r_n + r$:

$$r_{n+1} = x_{n+1} + y_{n+1} = 3x_n + y_n - 1 - 2x_n + 2 = x_n + y_n + 1 = r_n + 1.$$

   Ainsi j'ai bien montré que la suite $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite arithmétique de raison $r = 1$.

   b) Puisque la suite est arithmétique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$r_n = r_0 + 1 \times n, \qquad \textit{i.e.} \quad x_n + y_n = x_0 + y_0 + n = n + 2.$$

3. a) J'exprime $s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1}$ dans le but d'obtenir une expression de la forme $q \times s_n$:

$$s_{n+1} = 2x_{n+1} + y_{n+1} = 2 \times (3x_n + y_n - 1) - 2x_n + 2 = 4x_n + 2y_n = 2 \times (2x_n + y_n) = 2s_n.$$

   Ainsi j'ai bien montré que la suite $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison $q = 2$.

   b) Puisque la suite est géométrique, alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$s_n = s_0 \times q^n, \qquad \textit{i.e.} \quad 2x_n + y_n = (2x_0 + y_0) \times 2^n = 3 \times 2^n.$$

4. Grâce aux expressions des suites auxiliaires $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$, je remarque que

$$s_n - r_n = 2x_n + y_n - (x_n + y_n) = x_n \quad \text{et} \quad 2r_n - s_n = 2(x_n + y_n) - (2x_n + y_n) = y_n.$$

   Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$x_n = s_n - r_n = 3 \times 2^n - n - 2 \quad \text{et} \quad y_n = 2r_n - s_n = 2n + 4 - 3 \times 2^n.$$

Exercice 2 – [BSB 2015 / Ex1]

1. a) Je cherche à déterminer la matrice Q telle que $PQ = I_2$.
   Pour cela, j'exprime PQ en fonction des coefficients de Q :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & c+d \\ a-2b & c-2d \end{pmatrix}.$$

   Alors $PQ = I_2$ si et seulement si $a + b = c - 2d = 1$ et $c + d = a - 2b = 0$.
   Trouver de tels coefficients revient bien en effet à résoudre les systèmes

$$S_1 : \left\{ \begin{array}{ccccc} a & + & b & = & 1 \\ a & - & 2b & = & 0 \end{array} \right. \quad \text{et} \quad S_2 : \left\{ \begin{array}{ccccc} c & + & d & = & 0 \\ c & - & 2d & = & 1 \end{array} \right.$$

   b) En soustrayant la deuxième équation à la première dans les deux systèmes, j'obtiens

$$b + 2b = 1 - 0 \iff 3b = 1 \iff b = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad d + 2d = 0 - 1 \iff 3d = -1 \iff d = -\frac{1}{3}.$$

   Puis en remplaçant la variable par sa valeur dans la première équation, j'aboutis à

$$a + \frac{1}{3} = 1 \iff a = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \quad \text{et} \quad c - \frac{1}{3} = 0 \iff c = \frac{1}{3}.$$

   Finalement j'obtiens pour la matrice Q :

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

c) Je calcule les produits PQ et QP avec la matrice Q trouvée précédemment :

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2+1 & 1-1 \\ 2-2 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2,$$
$$Q \times P = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2+1 & 2-2 \\ 1-1 & 1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

J'ai bien vérifié que $PQ = QP = I_2$.

2. a) La matrice D est diagonale donc pour tout $n \in \mathbb{N}$, $D^n = \begin{pmatrix} 1^n & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}$.

b) Comme $A^n = PD^nQ$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$P \times D^n = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix},$$
$$A^n = PD^n \times Q = \begin{pmatrix} 1 & \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 1 & -2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix} \times \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 - 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 + 2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n \end{pmatrix}.$$

Or comme $-2 \times \left(-\frac{1}{2}\right)^n = (-1) \times 2 \times \frac{(-1)^n}{2^n} = \frac{(-1)^{n-1}}{2^{n-1}} = \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$,
j'ai bien montré que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A^n = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix}.$$

3. Les événements A_n, B_n et C_n forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(A_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(A_{n+1}).$$

Or d'après l'énoncé, $P_{A_n}(A_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(A_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(A_{n+1}) = 0$.
D'où
$$a_{n+1} = \frac{1}{4} b_n.$$

De même, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(B_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(B_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(B_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(B_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé, $P_{A_n}(B_{n+1}) = 1$, $P_{B_n}(B_{n+1}) = \frac{1}{2}$ et $P_{C_n}(B_{n+1}) = 1$.
D'où
$$b_{n+1} = a_n + \frac{1}{2} b_n + c_n.$$

Enfin, en utilisant à nouveau la formule des probabilités totales,

$$P(C_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(C_{n+1}) + P(B_n) \times P_{B_n}(C_{n+1}) + P(C_n) \times P_{C_n}(C_{n+1}).$$

Et d'après l'énoncé, $P_{A_n}(C_{n+1}) = 0$, $P_{B_n}(C_{n+1}) = \frac{1}{4}$ et $P_{C_n}(C_{n+1}) = 0$.
D'où
$$c_{n+1} = \frac{1}{4} b_n.$$

4. Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après ce qui précède,

$$b_{n+2} = a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{4}b_n + \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{4}b_n = \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n.$$

5. a) À l'instant 0, la mouche se trouve dans la pièce B donc $a_0 = 0$, $b_0 = 1$ et $c_0 = 0$.
D'après la question **3.**, $b_1 = a_0 + \frac{1}{2}b_0 + c_0 = \frac{1}{2}$. Par conséquent,

$$U_0 = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Soit $n \in \mathbb{N}$. Alors d'après la question précédente,

$$AU_n = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{2}b_{n+1} + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{n+2} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = U_{n+1}.$$

J'ai bien montré que $U_{n+1} = AU_n$ pour tout entier $n \in \mathbb{N}$.

b) **Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $U_n = A^n U_0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $A^0 U_0 = I_3 U_0 = U_0$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $U_n = A^n U_0$. Alors

$$U_{n+1} = AU_n = A \times A^n U_0 = A^{n+1} U_0.$$

Donc $U_{n+1} = A^{n+1} U_0$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad U_n = A^n U_0.$$

c) Soit $n \in \mathbb{N}$. D'après la question précédente ainsi que la question **2.**,

$$\begin{pmatrix} b_{n+1} \\ b_n \end{pmatrix} = U_n = A^n \times U_0 = \frac{1}{3} \times \begin{pmatrix} 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \\ 2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} & 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}.$$

En particulier,

$$b_n = \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{2} \times \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) + 1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3} \times \left(2 - \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right) = \frac{1}{3} \times \left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

J'ai bien montré que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_n = \frac{1}{3}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^n\right).$$

d) J'ai déjà traité le cas $n = 0$ à la question **5.a)** : $a_0 = c_0 = 0$.
Pour $n \geqslant 1$, cette fois d'après la question **3.**

$$a_n = c_n = \frac{1}{4}b_{n-1} = \frac{1}{12}\left(2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right).$$

Exercice 3 – [BSB 2015 / Ex2]

1. a) Pour la limite en $+\infty$, j'utilise les résultats de croissances comparées : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = 0$.
Puis
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln(x)}{x} = \ \ 0 \\ \lim\limits_{x\to+\infty} x+1 = +\infty \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty.$$
Pour la limite en 0, j'utilise les résultats classiques d'opérations sur les limites :
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to0} \ln(x) = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x = \ \ 0^+ \end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty.$$
Puis
$$\left.\begin{array}{r} \lim\limits_{x\to0} \dfrac{\ln(x)}{x} = -\infty \\ \lim\limits_{x\to0} x+1 = \ \ 1 \end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim\limits_{x\to0} f(x) = -\infty.$$
b) Je commence par calculer l'écart entre $f(x)$ et $y = x+1$, avant de montrer que cet écart tend vers 0 lorsque x tend vers $+\infty$.
$$f(x) - y = x+1+\frac{\ln(x)}{x} - \big(x+1\big) = \frac{\ln(x)}{x}.$$
Or j'ai déjà calculé la limite de cet écart à la question précédente :
par croissances comparées,
$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0.$$
Donc la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x+1$ est bien asymptote à la courbe $\mathcal{C}$ en $+\infty$.
c) J'étudie désormais le signe de $f(x) - y$, pour connaître la position relative des courbes.
Je sais que $f(x) - y = \dfrac{\ln(x)}{x}$ et puisque $x \in \left]0,+\infty\right[$, le signe de $\dfrac{\ln(x)}{x}$ dépend uniquement du signe de $\ln(x)$. Or je sais que $\ln(x) \leqslant 0$ sur $\left]0,1\right]$ et que $\ln(x) \geqslant 0$ sur $\left[1,+\infty\right[$. Ainsi,
   - $f(x) - y \leqslant 0$ sur $\left]0,1\right]$, *i.e.* $\mathcal{C}$ est en dessous de $\mathcal{D}$ sur $\left]0,1\right]$,
   - $f(x) - y \geqslant 0$ sur $\left[1,+\infty\right[$, *i.e.* $\mathcal{C}$ est au-dessus de $\mathcal{D}$ sur $\left[1,+\infty\right[$.

2. a) La fonction g est donnée sous la forme d'une somme, donc je dérive terme à terme :
$$g'(x) = 2x - \frac{1}{x} = \frac{2x^2-1}{x}.$$
Comme $x > 0$, le dénominateur est positif. Alors le signe de $g(x)$ est donné par celui de $2x^2-1$. Ainsi pour tout $x \in \left]0,+\infty\right[$,
$$2x^2-1 \geqslant 0 \iff 2x^2 \geqslant 1 \iff x^2 \geqslant \frac{1}{2} \iff x \geqslant \frac{1}{\sqrt{2}} \qquad \text{(car } x \text{ positif).}$$
J'en déduis alors le tableau de signe de $g'(x)$ et le tableau de variation de g :

x	0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g		$\searrow$		$\nearrow$	

b) Je remplace x par $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ dans l'expression de $g(x)$ et j'obtiens

$$g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 1 - \ln\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{2} + 1 + \ln\left(\sqrt{2}\right) = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}\ln(2).$$

Or je sais que $\ln(2) > 0$ puisque $2 > 1$, donc $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) > 0$. Et comme $g\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ correspond au minimum de la fonction g sur $]0,+\infty[$ (d'après le tableau de variation obtenu à la question précédente), alors j'en déduis que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$.

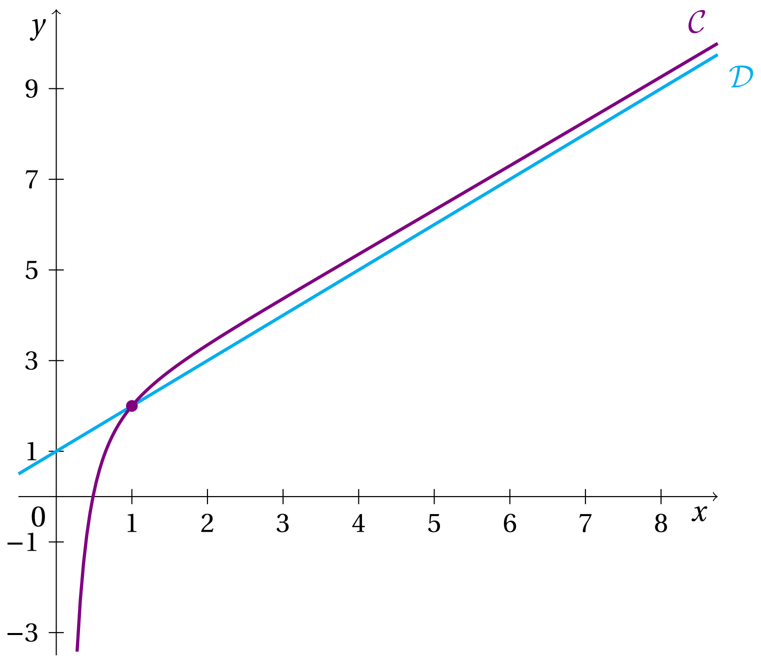
c) La fonction f est donnée sous la forme d'une somme : je peux dériver terme à terme. Plus précisément, f est de la forme $f(x) = x + 1 + \dfrac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = \ln(x)$ et $v(x) = x$. Puisque $u'(x) = \dfrac{1}{x}$ et $v'(x) = 1$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= 1 + \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = 1 + \frac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x) \times 1}{x^2} = 1 + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} \\ &= \frac{x^2}{x^2} + \frac{1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{x^2 + 1 - \ln(x)}{x^2} = \frac{g(x)}{x^2}. \end{aligned}$$

d) J'ai montré à la question **2.b)** que $g(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. Puisque $x^2 > 0$ également, j'en déduis que $f'(x) > 0$ pour tout $x \in]0,+\infty[$. J'obtiens donc le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	0		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$+\infty$

3. La courbe a une asymptote verticale d'équation $x = 0$ et la droite $\mathcal{D}$ est asymptote en $+\infty$. Le point d'intersection de $\mathcal{C}$ avec $\mathcal{D}$ a pour abscisse 1. Je suis donc capable de tracer l'allure de la courbe.



4. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \geqslant n+1$.

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = 1$ et $0+1=1$ donc $u_0 \geqslant 0+1$.
Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $u_n \geqslant n+1 \geqslant 1$.
Et j'ai montré à la question **1.c)** que pour tout $x \geqslant 1$, $f(x) \geqslant x+1$. Ainsi

$$u_{n+1} = f(u_n) \geqslant u_n + 1 \geqslant n+1+1 = n+2.$$

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \geqslant n+1.$$

b) Pour établir le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, j'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = f(u_n) - u_n = u_n + 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n} - u_n = 1 + \frac{\ln(u_n)}{u_n}.$$

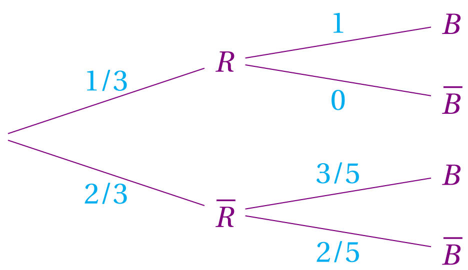
Or d'après la question précédente, $u_n \geqslant n+1$ pour tout n. En particulier, $u_n \geqslant 1$ pour tout n et donc $\ln(u_n) \geqslant 0$. Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 1 \geqslant 0$. Et donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
Par ailleurs, comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant n+1$ et que $\lim\limits_{n\to+\infty} n+1 = +\infty$, alors par le théorème de comparaison des limites,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = +\infty.$$

Exercice 4 – [BSB 2015 / Ex3]

Partie I

La situation peut être illustrée à l'aide de l'arbre de probabilités suivant :



1. Les événements R et $\overline{R}$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales,

$$P(B) = P\big(R \cap B\big) + P\big(\overline{R} \cap B\big) = P(R) \times P_R(B) + P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(B) = \frac{1}{3} \times 1 + \frac{2}{3} \times \frac{3}{5} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} = \frac{11}{15}.$$

2. Il s'agit de calculer la probabilité $P_B(\overline{R})$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_B(\overline{R}) = \frac{P(B \cap \overline{R})}{P(B)} = \frac{P(\overline{R}) \times P_{\overline{R}}(B)}{P(B)} = \frac{\frac{2}{3} \times \frac{3}{5}}{\frac{11}{15}} = \frac{6}{11}.$$

La probabilité que Coralie se soit levée à l'heure sachant qu'elle prend le bus est égale à $\dfrac{6}{11}$.

3. a) La variable aléatoire X compte le nombre de succès lors de $n = 180$ répétitions, identiques et indépendantes, de l'épreuve de Bernoulli de succès "Coralie prend le bus", de probabilité $p = \frac{11}{15}$. Donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 180$ et $p = \frac{11}{15}$. Par conséquent, le support est donné par $X(\Omega) = [\![0, 180]\!]$ et

$$\forall k \in [\![0, 180]\!], \quad P(X = k) = \binom{180}{k} \times \left(\frac{11}{15}\right)^k \times \left(\frac{4}{15}\right)^{180-k}.$$

b) Comme X suit une loi binomiale,

$$E(X) = np = 180 \times \frac{11}{15} = 132 \quad \text{et} \quad V(X) = np(1-p) = 132 \times \frac{4}{15} = \frac{176}{5}.$$

c) Soit Z la variable aléatoire égale au nombre de jours dans l'année où Coralie va au lycée à pied. Il est clair que $Z = 180 - X$ puisqu'il y a X jours où Coralie prend le bus sur un total de 180 jours. Puis par linéarité de l'espérance,

$$E(Z) = E(180 - X) = 180 - E(X) = 180 - 132 = 48.$$

En conclusion, Coralie peut espérer aller au lycée à pied 48 jours dans l'année.

Partie II

1. En utilisant le tableau définissant la loi de N, j'obtiens

$$E(N) = 1 \times \frac{1}{2} + 2 \times \frac{1}{8} + 3 \times \frac{3}{8} = \frac{15}{8}.$$

2. D'après le tableau de la loi de N, le support de N est donné par $N(\Omega) = [\![1, 3]\!]$. Il y a donc au plus 3 jours de grève et Coralie peut arriver en retard 0, 1, 2 ou 3 matins. Donc $Y(\Omega) = [\![0, 3]\!]$.

3. a) En utilisant les données de l'énoncé, $P_{[N=1]}(Y = 0)$ est la probabilité que Coralie ne soit pas en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 0) = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$.
$P_{[N=1]}(Y = 1)$ est la probabilité que Coralie soit en retard le premier jour de grève donc $P_{[N=1]}(Y = 1) = \frac{1}{3}$.

b) Par la formule des probabilités composées,

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 0]\big) = P(N = 1) \times P_{[N=1]}(Y = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} = \frac{1}{3}$$

et

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 1]\big) = P(N = 1) \times P_{[N=1]}(Y = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{6}.$$

Enfin, il est impossible que Coralie ait plus de retard qu'il n'y a de jours de grève.
Donc puisque Y est le nombre de retards pendant la période de grève, j'en déduis que

$$P\big([N = 1] \cap [Y = 2]\big) = 0 \quad \text{et} \quad P\big([N = 1] \cap [Y = 3]\big) = 0.$$

4. a) Les événements $[N = 1]$, $[N = 2]$ et $[N = 3]$ forment un système complet d'événements donc d'après la formule des probabilités totales et les probabilités données par la loi conjointe,

$$\begin{aligned} P(Y = 0) &= P\big([N = 1] \cap [Y = 0]\big) + P\big([N = 2] \cap [Y = 0]\big) + P\big([N = 3] \cap [Y = 0]\big) \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{18} + \frac{1}{9} = \frac{6 + 1 + 2}{18} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Je raisonne de même pour le calcul des probabilités $P(Y=1)$, $P(Y=2)$ et $P(Y=3)$ et j'obtiens ainsi la loi de Y, que je résume dans le tableau suivant :

k	0	1	2	3
$P(Y=k)$	$\frac{1}{2}$	$\frac{7}{18}$	$\frac{7}{72}$	$\frac{1}{72}$

Enfin par définition de l'espérance,

$$E(Y) = 0\times\frac{1}{2} + 1\times\frac{7}{18} + 2\times\frac{7}{72} + 3\times\frac{1}{72} = \frac{28+14+3}{72} = \frac{45}{72} = \frac{5}{8}.$$

b) La probabilité que Coralie ne soit pas en retard au lycée une seule fois pendant la durée de la grève est donnée par $P(Y=0) = \frac{1}{2}$.

c) D'après la question **3.b)**, $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big) = \frac{1}{3}$ alors que $P(N=1) = \frac{1}{2}$ et $P(Y=0) = \frac{1}{2}$. Donc $P\big([N=1]\cap[Y=0]\big) \neq P(N=1)\times P(Y=0)$, ce qui prouve que les variables aléatoires Y et N ne sont pas indépendantes.

d) En utilisant la définition, j'obtiens que

$$E(YN) = \frac{1}{6}+\frac{2}{18}+\frac{4}{72}+\frac{3}{6}+\frac{6}{12}+\frac{9}{72} = \frac{1}{6}+\frac{1}{9}+\frac{1}{18}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{8} = \frac{1}{3}+1+\frac{1}{8} = \frac{8+24+3}{24} = \frac{35}{24}.$$

Alors d'après la formule de König-Huygens,

$$\mathrm{Cov}(Y,N) = E(YN) - E(Y)\times E(N).$$

Et d'après les questions **1.** et **4.a)**, $E(N) = \frac{15}{8}$ et $E(Y) = \frac{5}{8}$.
Donc

$$\mathrm{Cov}(Y,N) = \frac{35}{24} - \frac{5}{8}\times\frac{15}{8} = \frac{35}{24} - \frac{75}{64} = \frac{35\times 8}{192} - \frac{75\times 3}{192} = \frac{280-225}{192} = \frac{55}{192}.$$