

## DEVOIR SURVEILLÉ 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Les candidats sont invités à **encadrer** dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.

**Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.**

Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 3 pages et est constitué de 5 exercices. Bon courage!

**Exercice 1** – On définit les quatre matrices carrées d'ordre 2 suivantes :

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{pmatrix}, \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

On considère également la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 1}{u_n + 3}.$$

1. Calculer les produits  $P \times Q$  et  $Q \times P$ .
2. **Calcul de  $A^n$ .** On pose  $B = QAP$ .
  - a) Vérifier que  $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ . (Les calculs intermédiaires doivent être indiqués sur la copie.)
  - b) **En déduire** que  $A = PBQ$ .
  - c) Donner les quatre coefficients de la matrice  $B^n$ .
  - d) Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $A^n = PB^nQ$ .
  - e) En déduire les quatre coefficients de la matrice  $A^n$ .
3. **Convergence de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .**
  - a) Démontrer par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n \geq 1$ .
  - b) Déterminer le signe de  $u_{n+1} - u_n$ . En déduire le sens de variation de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - c) Prouver que la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$  converge. On note  $L$  la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .
  - d) Montrer que  $L = \frac{3L+1}{L+3}$ , résoudre cette équation puis déterminer  $L$ .
4. **Calcul de  $u_n$  et de sa limite.** Pour tout entier  $n$ , on considère les deux suites  $(a_n)_{n \geq 0}$  et  $(b_n)_{n \geq 0}$  définies par

$$\begin{cases} a_0 = 2 \\ b_0 = 1 \end{cases} \quad \text{et} \quad \forall n \geq 0, \quad \begin{cases} a_{n+1} = \frac{3}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{3}{2}b_n \end{cases}$$

On admet que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $a_n > 0$  et  $b_n > 0$ .

- a) Prouver par récurrence que pour tout entier  $n \geq 0$ ,  $u_n = \frac{a_n}{b_n}$ .
- b) On pose pour tout  $n \geq 0$ ,  $U_n = \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$ . Donner l'expression de  $U_{n+1}$  en fonction de  $A$  et  $U_n$  puis donner (sans démonstration) l'expression de  $U_n$  en fonction de  $A$ ,  $n$  et  $U_0$ .
- c) Donner l'expression de  $u_n$  en fonction de  $n$  puis retrouver ainsi la limite de la suite  $(u_n)_{n \geq 0}$ .

**Exercice 2** – On considère les fonctions  $f$  et  $g$  définies sur  $\mathbb{R}_+^*$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = 2x + \frac{3\ln(x)}{x^2} \quad \text{et} \quad g(x) = 2x^3 - 6\ln(x) + 3.$$

On note  $\mathcal{C}_f$  la courbe représentative de  $f$ .

**1. Étude du signe de  $g(x)$ .**

- a) Calculer  $g'(x)$  lorsque  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .
- b) Vérifier que l'équation  $g'(x) = 0$  admet une unique solution  $p$  que l'on précisera et construire le tableau de variation de  $g$ .
- c) Calculer  $g(p)$  puis donner le signe de  $g(x)$  lorsque  $x \in \mathbb{R}_+^*$ .

**2. Étude asymptotique de  $f$ .**

- a) Déterminer la limite de  $f(x)$  quand  $x \rightarrow 0^+$  et quand  $x \rightarrow +\infty$ .
- b) Montrer que la droite  $\mathcal{D}$  d'équation  $y = 2x$  est asymptote oblique de  $\mathcal{C}_f$  quand  $x \rightarrow +\infty$  et préciser la position de cette asymptote par rapport à  $\mathcal{C}_f$ .

**3. Représentation graphique de  $f$ .**

- a) Démontrer que

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f'(x) = \frac{g(x)}{x^3}.$$

- b) Dresser le tableau de variation de  $f$  sur  $\mathbb{R}_+^*$  en indiquant dans celui-ci les limites de  $f$  en  $0^+$  et en  $+\infty$ .
- c) Tracer sur un même dessin le graphe de  $\mathcal{C}_f$  ainsi que celui de son asymptote  $\mathcal{D}$ .

**4. Étude d'une équation.** Soit  $n \geq 1$  un entier naturel non nul, on considère l'équation

$$(E_n): \quad f(x) = 2n.$$

- a) Prouver que l'équation  $(E_n)$  admet une unique solution (*que l'on ne cherche pas à calculer*). On note  $x_n$  cette solution.
- b) Calculer puis classer par ordre croissant les réels  $f(x_n)$ ,  $f(1)$  et  $f(n)$ .  
En déduire l'encadrement

$$\forall n \geq 1, \quad 1 \leq x_n \leq n.$$

- c) Justifier que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $1 - \frac{x_n}{n} = \frac{3\ln(x_n)}{2n(x_n)^2}$ .

- d) Prouver que pour tout entier  $n \geq 1$ ,  $0 \leq \frac{\ln(x_n)}{n(x_n)^2} \leq \frac{\ln(n)}{n}$ .

- e) En déduire  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{x_n}{n}$ .

**Exercice 3** – Soient  $A$ ,  $K$  et  $I$  les trois matrices carrées d'ordre 3 définies par

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad K = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer  $K^2$  et  $K^3$ .
- b) Déterminer  $K^n$  pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 3.
2. a) Exprimer  $A$  en fonction de  $I$  et  $K$ .
- b) À l'aide de la formule du binôme de Newton, exprimer pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2,  $A^n$  en fonction des matrices  $I$ ,  $K$ ,  $K^2$  et de  $n$ .
- c) En déduire pour tout entier  $n$  supérieur ou égal à 2, l'expression explicite de la matrice  $A^n$  en fonction de  $n$ .
- d) Vérifier que le résultat trouvé est encore valable pour  $n = 0$  et  $n = 1$ .

**Exercice 4** – On dispose d'un dé cubique classique équilibré et d'une pièce équilibrée.

On lance le dé et on observe son résultat :

- Si celui-ci est un 6, on lance la pièce deux fois.
- Dans tous les autres cas, on lance la pièce une seule fois.

On note  $X$  la variable aléatoire égale au résultat du dé.

On note  $Y$  la variable aléatoire égale au nombre de PILE apparus au cours de cette expérience.

1. a) Justifier que  $X$  suit une loi uniforme que l'on précisera en détail.
- b) Donner l'espérance  $E(X)$  et la variance  $V(X)$ .
2. Montrer que  $P(Y = 2) = P([Y = 2] \cap [X = 6]) = \frac{1}{24}$ .
3. a) Montrer que pour  $k \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$ ,  $P_{[X=k]}(Y = 0) = \frac{1}{2}$ .
- b) Que vaut  $P_{[X=6]}(Y = 0)$ ? En déduire, en utilisant la formule des probabilités totales, que  $P(Y = 0) = \frac{11}{24}$ .
- c) Donner finalement la loi de la variable  $Y$  et calculer son espérance.
4. a) Recopier et compléter le tableau suivant afin qu'il fournisse la loi du couple  $(X, Y)$ .  
(Aucune justification supplémentaire n'est demandée.)

	$X = 1$	$X = 2$	$X = 3$	$X = 4$	$X = 5$	$X = 6$
$Y = 0$						
$Y = 1$						
$Y = 2$						

- b) Calculer alors la covariance de  $X$  et de  $Y$ .

**Exercice 5 (BONUS)** – Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} -2 & -6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -3 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & -2 \\ 1 & 3 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. a) Calculer les produits matriciels  $A(A - I)$  et  $B(B - I)$ .
- b) **En déduire** que  $A^2 = A$  et que  $B^2 = B$ .
- c) Calculer  $AB$  ainsi que  $BA$ .
2. On note dans toute la suite  $W = A + 2B$ .
- a) En utilisant les relations obtenues à la question précédente, montrer que  $W^2 = A + 4B$ .
- b) Plus généralement, montrer par récurrence que pour tout entier naturel  $n$  non nul,

$$W^n = A + 2^n B.$$