

DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – [Adapté de BSB 2017 / Ex1]

1. Je calcule les produits matriciels $P \times Q$ et $Q \times P$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I,$$

$$Q \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I.$$

2. Je calcule le produit $Q \times A$ puis multiplie le résultat par P :

$$Q \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$QA \times P = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

J'ai bien montré que $QAP = L$.

3. a) Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $QA^n P = L^n$.

Initialisation : Pour $n = 0$,

$$QA^0 P = QIP = QP = I \quad \text{et} \quad L^0 = I.$$

Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, $QA^n P = L^n$. Alors

$$L^{n+1} = L^n \times L = QA^n P \times QAP = QA^n IAP = QA^{n+1} P.$$

Donc $QA^{n+1} P = L^{n+1}$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire,

alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad QA^n P = L^n.$$

b) Je détermine J puis calcule ses puissances successives :

$$J = L - I = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ainsi

$$J^2 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{et} \quad J^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 0_3.$$

- c) Pour tout $n \geq 3$, d'après la question précédente, $J^n = J^3 \times J^{n-3} = 0_3 \times J^{n-3} = 0_3$.
Par ailleurs, les matrices I et J commutent donc je peux appliquer la formule du binôme de Newton à la matrice $L = I + J$:

$$L^n = (I + J)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} I^{n-k} J^k.$$

Comme tous les termes de cette somme sont nuls dès lors que $k \geq 3$, j'obtiens alors

$$L^n = \binom{n}{0} I^n J^0 + \binom{n}{1} I^{n-1} J^1 + \binom{n}{2} I^{n-2} J^2 = I + nJ + \frac{n(n-1)}{2} J^2.$$

- d) D'après les résultats obtenus aux questions précédentes, pour $n \geq 2$,

$$L^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 2n & 0 \\ 0 & 0 & 2n \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2n(n-1) \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Pour $n = 0$ et $n = 1$, cette formule me donne les matrices

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \times 0 & 2 \times 0 \times (-1) \\ 0 & 1 & 2 \times 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I \quad \text{et} \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 \times 1 & 2 \times 1 \times 0 \\ 0 & 1 & 2 \times 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = L,$$

donc cette formule reste valable pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}$.

- e) Je sais que $QA^nP = L^n$ donc $PL^nQ = PQA^nPQ = IA^nI = A^n$. Ainsi $A^n = PL^nQ$ et

$$PL^n = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix}$$

$$A^n = PL^n \times Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2n & 2n(n-1) \\ 0 & 1 & 2n \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2n(n-1) & 1 & 2n \\ 2n & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

4. a) La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite constante. Alors pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 = 1.$$

- b) Pour $n \geq 1$, je calcule le produit AX_n :

$$AX_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_n + 2w_n \\ 2 + w_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ v_{n+1} \\ w_{n+1} \end{pmatrix} = X_{n+1}.$$

J'ai bien montré que pour tout $n \geq 1$, $X_{n+1} = AX_n$.

- c) **Énoncé :** Je note \mathcal{P}_n la propriété : $X_n = A^{n-1}X_1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $A^0X_1 = IX_1 = X_1$. Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, $X_n = A^{n-1}X_1$. Alors

$$X_{n+1} = AX_n = A \times A^{n-1}X_1 = A^nX_1.$$

Donc $X_{n+1} = A^{n+1-1}X_1$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad X_n = A^{n-1} X_1.$$

d) Je sais que $\begin{pmatrix} 1 \\ v_n \\ w_n \end{pmatrix} = X_n = A^{n-1} X_1.$

Il me suffit donc d'opérer ce produit pour déduire les formules de v_n et w_n :

$$A^{n-1} X_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2(n-1)(n-2) & 1 & 2(n-1) \\ 2(n-1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2(n-1)(n-2) + 4(n-1) \\ 2(n-1) + 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2n(n-1) \\ 2n \end{pmatrix}$$

Ainsi j'ai bien montré que pour tout $n \geq 1$,

$$v_n = 2n(n-1) \quad \text{et} \quad w_n = 2n.$$

Exercice 2 – [BSB 2018 / Ex2]

1. a) Je calcule la dérivée de g puis étudie son signe. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, $g'(x) = e^x + 1 > 0$. Ainsi la fonction g est (strictement) croissante sur \mathbb{R} .
- b) J'évalue g en 0 : $g(0) = e^0 - 1 + 0 = 1 - 1 = 0$. Puisque g est croissante sur \mathbb{R} , alors pour tout réel $x \geq 0$, $g(x) \geq g(0) = 0$, et pour tout réel $x \leq 0$, $g(x) \leq g(0) = 0$. J'obtiens ainsi le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$g(x)$	-	0	+

2. a) Par croissances comparées, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$. Alors

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} x + 1 = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty.$$

- b) Je calcule l'écart entre la courbe et l'asymptote puis calcule la limite de cet écart :

$$f(x) - y = x + 1 - \frac{x}{e^x} - (x + 1) = -\frac{x}{e^x}.$$

Or j'ai déjà montré à la question précédente que $\lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{x}{e^x} = 0$.

Donc la droite \mathcal{D} d'équation $y = x + 1$ est bien asymptote à la courbe \mathcal{C} en $+\infty$.

- c) Je réécris l'expression de la fonction $f(x)$ de sorte à lever l'indétermination :

$$f(x) = x + 1 - \frac{x}{e^x} = x + 1 - x e^{-x} = 1 - x(e^{-x} - 1).$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -x = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} e^{-x} - 1 = +\infty \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} -x(e^{-x} - 1) = +\infty.$$

Finalement, par somme, $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) La fonction f est donnée sous la forme $f(x) = x + 1 - \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = 1$ et $v'(x) = e^x$ puis

$$f'(x) = 1 - \frac{1 \times e^x - x \times e^x}{(e^x)^2} = 1 - \frac{1 - x}{e^x} = \frac{e^x - 1 + x}{e^x} = \frac{g(x)}{e^x}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f'(x) = \frac{g(x)}{e^x}$.

- b) Comme pour tout $x \in \mathbb{R}, e^x > 0$, alors $f'(x)$ est du signe de $g(x)$. Or le signe de $g(x)$ a été déterminé à la question 1.. J'obtiens donc le tableau de variation suivant pour f :

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
f	$+\infty$	1	$+\infty$

4. La fonction f' est donnée sous la forme $f'(x) = \frac{u(x)}{v(x)}$, avec $u(x) = e^x - 1 + x$ et $v(x) = e^x$.
Alors $u'(x) = e^x + 1$ et $v'(x) = e^x$ puis

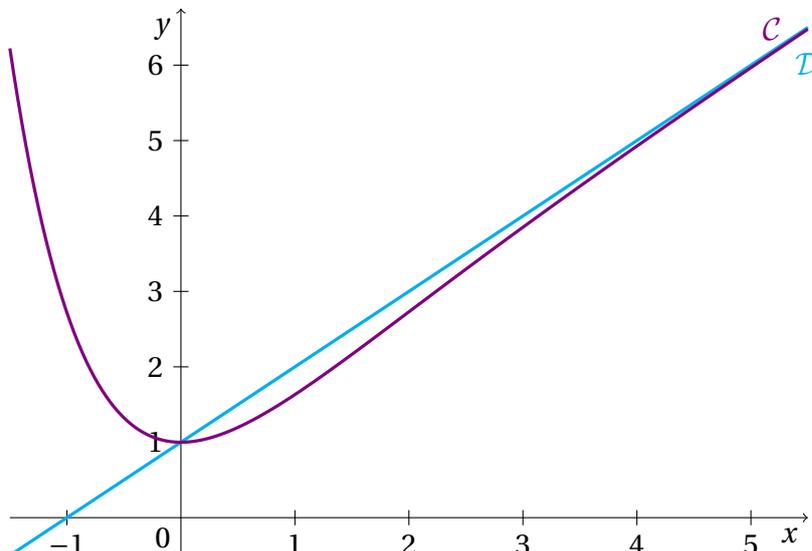
$$f''(x) = \frac{(e^x + 1) \times e^x - (e^x - 1 + x) \times e^x}{(e^x)^2} = \frac{e^x + 1 - e^x + 1 - x}{e^x} = \frac{2 - x}{e^x}.$$

J'ai bien montré que $\forall x \in \mathbb{R}, f''(x) = \frac{2 - x}{e^x}$. Pour étudier la convexité de f , j'ai besoin de connaître le signe de $f''(x)$. Or $e^x > 0$ et $2 - x \geq 0 \iff x \leq 2$. D'où le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$f''(x)$	+	0	-

Ainsi la fonction f est convexe sur l'intervalle $]-\infty, 2]$ puis concave sur l'intervalle $[2, +\infty[$.

5. Voici les représentations graphiques de la courbe \mathcal{C} et de la droite \mathcal{D} :



Exercice 3 – [ESCP 2013 / Ex3]

1. a) Je note pour $k \in \{1, 2\}$, U_k l'événement "le premier tirage s'effectue dans l'urne \mathcal{U}_k ".
Alors d'après la formule des probabilités totales,

$$\begin{aligned} P(X_1 = 1) &= P(U_1 \cap [X_1 = 1]) + P(U_2 \cap [X_1 = 1]) \\ &= P(U_1) \times P_{U_1}(X_1 = 1) + P(U_2) \times P_{U_2}(X_1 = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{3}{5} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} = \frac{3+1}{10} = \frac{2}{5}. \end{aligned}$$

Comme les seules valeurs possibles pour la variable aléatoire X_1 sont 0 et 1, alors X_1 suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{2}{5}$.

- b) Comme X_1 suit une loi de Bernoulli,

$$E(X_1) = p = \frac{2}{5} \quad \text{et} \quad V(X_1) = p(1-p) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}.$$

2. a) Comme par définition $Z = X_1 + X_2$, alors $[X_2 = 0] \cap [Z = 0] = [X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]$.
Puis d'après la formule des probabilités composées,

$$P([X_2 = 0] \cap [Z = 0]) = P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 0) = \frac{3}{5} \times \frac{4}{5} = \frac{12}{25}.$$

- b) Les événements $[X_2 = 1] \cap [Z = 0]$ et $[X_2 = 0] \cap [Z = 2]$ sont impossibles donc

$$P([X_2 = 1] \cap [Z = 0]) = P([X_2 = 0] \cap [Z = 2]) = 0.$$

Par ailleurs, de la même manière que dans la question précédente,

$$\begin{aligned} P([X_2 = 0] \cap [Z = 1]) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 0]) = P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 0) = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}, \\ P([X_2 = 1] \cap [Z = 1]) &= P([X_1 = 0] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 0) \times P_{[X_1=0]}(X_2 = 1) = \frac{3}{5} \times \frac{1}{5} = \frac{3}{25}, \\ P([X_2 = 1] \cap [Z = 2]) &= P([X_1 = 1] \cap [X_2 = 1]) = P(X_1 = 1) \times P_{[X_1=1]}(X_2 = 1) = \frac{2}{5} \times \frac{3}{5} = \frac{6}{25}. \end{aligned}$$

Je résume tout cela dans le tableau ci-dessous :

	$Z = 0$	$Z = 1$	$Z = 2$
$X_2 = 0$	$\frac{12}{25}$	$\frac{4}{25}$	0
$X_2 = 1$	0	$\frac{3}{25}$	$\frac{6}{25}$

3. a) Je détermine la loi de X_2 en additionnant les probabilités de chaque ligne dans le tableau précédent. J'obtiens

x	0	1
$P(X_2 = x)$	$\frac{16}{25}$	$\frac{9}{25}$

La variable aléatoire X_2 suit donc une loi de Bernoulli de paramètre $p = \frac{9}{25}$. Ainsi

$$E(X_2) = p = \frac{9}{25} \quad \text{et} \quad V(X_2) = p(1-p) = \frac{9}{25} \times \frac{16}{25} = \frac{144}{625}.$$

b) Je sais que $P(X_1 = 1) = \frac{2}{5}$, $P(X_2 = 1) = \frac{9}{25}$ et $P(X_1 = 1, X_2 = 1) = \frac{6}{25}$.

J'en déduis alors que $P(X_1 = 1) \times P(X_2 = 1) \neq P(X_1 = 1, X_2 = 1)$.

Donc les variables X_1 et X_2 ne sont pas indépendantes.

c) Je détermine la loi de Z en additionnant les probabilités de chaque colonne dans le tableau de la loi du couple (X_2, Z) . J'obtiens

z	0	1	2
$P(Z = z)$	$\frac{12}{25}$	$\frac{7}{25}$	$\frac{6}{25}$

d) Je calcule l'espérance et la variance de la variable aléatoire Z :

$$E(Z) = 0 \times \frac{12}{25} + 1 \times \frac{7}{25} + 2 \times \frac{6}{25} = \frac{7+12}{25} = \frac{19}{25}.$$

Par ailleurs, en utilisant le théorème de transfert, je sais que

$$E(Z^2) = 0^2 \times \frac{12}{25} + 1^2 \times \frac{7}{25} + 2^2 \times \frac{6}{25} = \frac{7+24}{25} = \frac{31}{25}.$$

Alors par la formule de König-Huygens, j'obtiens que

$$V(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{31}{25} - \left(\frac{19}{25}\right)^2 = \frac{31 \times 25 - 19^2}{25^2} = \frac{775 - 361}{625} = \frac{414}{625}.$$

4. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{|X_1=0}(U_1) = \frac{P(U_1 \cap [X_1 = 0])}{P(X_1 = 0)} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{2}{5}}{\frac{3}{5}} = \frac{1}{3}.$$

La probabilité que la boule verte tirée au premier tirage provienne de l'urne \mathcal{U}_1 est $\frac{1}{3}$.

5. a) Grâce au tableau de la loi conjointe, je sais que

$$E(X_2 Z) = 1 \times 1 \times \frac{3}{25} + 1 \times 2 \times \frac{6}{25} = \frac{3+12}{25} = \frac{15}{25} = \frac{3}{5}.$$

b) D'après la formule de König-Huygens, je sais que

$$\text{Cov}(X_2, Z) = E(X_2 Z) - E(X_2)E(Z) = \frac{3}{5} - \frac{9}{25} \times \frac{19}{25} = \frac{375 - 171}{625} = \frac{204}{625}.$$

c) Comme $Z = X_1 + X_2$, alors $X_1 = Z - X_2$. Ainsi par linéarité à gauche de la covariance,

$$\text{Cov}(X_1, X_2) = \text{Cov}(Z - X_2, X_2) = \text{Cov}(Z, X_2) - V(X_2) = \frac{204}{625} - \frac{144}{625} = \frac{60}{625} = \frac{12}{125}.$$

d) Comme $Z = X_1 + X_2$, alors

$$V(Z) = V(X_1) + V(X_2) + 2 \text{Cov}(X_1, X_2) = \frac{6}{25} + \frac{144}{625} + 2 \times \frac{12}{125} = \frac{150 + 144 + 120}{625} = \frac{414}{625}.$$