DEVOIR MAISON 1

Exercice 1 – On considère les matrices suivantes

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&2\\2&0&1\end{pmatrix},\quad L=\begin{pmatrix}1&2&0\\0&1&2\\0&0&1\end{pmatrix},\quad P=\begin{pmatrix}0&0&1\\1&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad Q=\begin{pmatrix}0&1&0\\0&0&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

1. Calculer PQ et QP.
2. Vérifier que $QAP=L$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel n, on a $QA^nP=L^n$.
   b) Soit $J=L-I$. Calculer J^2 puis J^3.
   c) En utilisant la formule du binôme de Newton, montrer que pour tout entier $n\geqslant 2$, on a
   $$L^n=I+nJ+\frac{n(n-1)}{2}J^2.$$
   d) En déduire, pour $n\geqslant 2$, les neufs coefficients de L^n.
   Vérifier que votre résultat reste vrai lorsque $n=0$ et $n=1$.
   e) Déduire des questions précédentes que pour tout $n\in\mathbb{N}$, on a
   $$A^n=\begin{pmatrix}1&0&0\\2n(n-1)&1&2n\\2n&0&1\end{pmatrix}.$$
4. On considère les trois suites $(u_n)_{n\geqslant1}$, $(v_n)_{n\geqslant1}$ et $(w_n)_{n\geqslant1}$ définies par $u_1=1$, $v_1=0$ et $w_1=2$ et pour tout entier naturel $n\geqslant 1$,
   $$u_{n+1}=u_n,\qquad v_{n+1}=v_n+2w_n\quad\text{et}\quad w_{n+1}=2u_n+w_n.$$
   a) Que pouvez-vous dire de la suite $(u_n)_{n\geqslant1}$? Donner u_n pour tout entier $n\geqslant 1$.
   b) Pour tout entier $n\geqslant 1$, on pose $X_n=\begin{pmatrix}1\\v_n\\w_n\end{pmatrix}$. Montrer que $X_{n+1}=AX_n$.
   c) Établir pour tout entier $n\geqslant 1$ que $X_n=A^{n-1}X_1$.
   d) Déduire des questions précédentes que pour tout entier $n\geqslant 1$, on a
   $$v_n=2n(n-1)\quad\text{et}\quad w_n=2n.$$

Exercice 2 –
Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x)=e^x-1+x$.

1. a) Montrer que g est croissante sur $\mathbb{R}$.
   b) Calculer $g(0)$. En déduire, pour tout réel x, le signe de $g(x)$ selon les valeurs de x.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=x+1-\dfrac{x}{e^x}$.
On note $\mathcal{C}$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$ d'unité 2 cm.

2. a) Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$.

b) Montrer que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x + 1$ est asymptote à $\mathcal{C}$ en $+\infty$.

c) Justifier que $\lim\limits_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$.

3. a) Montrer que la dérivée de f vérifie, pour tout réel x, la relation $f'(x) = \dfrac{g(x)}{e^x}$.

   b) Dresser le tableau des variations de f en y faisant figurer les limites calculées en **2.**.

4. Montrer que la dérivée seconde de f vérifie, pour tout réel x, la relation $f''(x) = \dfrac{2-x}{e^x}$.
   Étudier la convexité de f.

5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}$ et de $\mathcal{D}$.

Exercice 3 –

- *On note $E(X)$ et $V(X)$ respectivement, l'espérance et la variance d'une variable aléatoire X et $\mathrm{Cov}(X,Y)$ la covariance de deux variables aléatoires X et Y.*
- *On donnera tous les résultats sous forme fractionnaire.*

On dispose de deux urnes $\mathcal{U}_1$ et $\mathcal{U}_2$. L'urne $\mathcal{U}_1$ contient trois boules rouges et deux boules vertes, tandis que l'urne $\mathcal{U}_2$ contient une boule rouge et quatre boules vertes. On choisit une des deux urnes au hasard (c'est-à-dire que chacune des deux urnes a la même probabilité d'être choisie), puis on tire dans l'urne choisie une boule que l'on remet ensuite dans la même urne.

- Si la boule tirée est rouge, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_1$.
- Si la boule tirée est verte, on effectue un second tirage d'une boule dans l'urne $\mathcal{U}_2$.

Soient X_1 et X_2 les variables aléatoires définies par

$$X_1 = \begin{cases} 1 & \text{si la première boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la première boule tirée est verte.} \end{cases} \quad \text{et} \quad X_2 = \begin{cases} 1 & \text{si la deuxième boule tirée est rouge,} \\ 0 & \text{si la deuxième boule tirée est verte.} \end{cases}$$

On pose $Z = X_1 + X_2$.

1. a) Montrer que $P(X_1 = 1) = \dfrac{2}{5}$. Quelle est la loi de la variable aléatoire X_1 ?

   b) Donner les valeurs de $E(X_1)$ et $V(X_1)$.

2. a) Montrer que $P\big([X_2 = 0] \cap [Z = 0]\big) = \dfrac{12}{25}$.

   b) Donner sous forme de tableau la loi du couple (X_2, Z).

3. a) Déterminer la loi de X_2 ainsi que $E(X_2)$ et $V(X_2)$.

   b) Les variables aléatoires X_1 et X_2 sont-elles indépendantes ?

   c) Déterminer la loi de Z.

   d) Calculer $E(Z)$. Montrer que $V(Z) = \dfrac{414}{625}$.

4. On considère l'événement "la première boule tirée est verte".
   Calculer la probabilité que cette boule verte provienne d'un tirage dans l'urne $\mathcal{U}_1$.

5. On se propose dans cette question de calculer $V(Z)$ par une autre méthode.

   a) Calculer $E(X_2 Z)$.

   b) Montrer que $\mathrm{Cov}(X_2, Z) = \dfrac{204}{625}$.

   c) En déduire la valeur de $\mathrm{Cov}(X_1, X_2)$.

   d) Utiliser le résultat précédent pour calculer $V(Z)$.