INTERRO DE RENTRÉE

Exercice 1 –

1. $4x-5=-2x+3 \iff 6x=8 \iff x=\frac{8}{6}=\frac{4}{3}$
   Donc $\mathcal{S}=\left\{\frac{4}{3}\right\}$.
2. $x+4\leqslant -2x+5 \iff 3x\leqslant 1 \iff x\leqslant \frac{1}{3}$
   Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,\frac{1}{3}\right]$.
3. $2x^2-7x+3=x^2+3x-18 \iff x^2-10x+21=0$
   Je calcule le discriminant : $\Delta=(-10)^2-4\times1\times21=100-84=16>0$.
   Le polynôme admet donc deux racines :
   $$x_1=\frac{-(-10)-\sqrt{16}}{2\times1}=\frac{10-4}{2}=3 \quad \text{et} \quad x_2=\frac{10+4}{2}=7.$$
   Donc $\mathcal{S}=\{3,7\}$.
4. Je cherche le signe de $P(x)=2x^3-3x^2+5x-4$.
   Comme la somme des coefficients est nulle, alors 1 est une racine : $P(1)=2-3+5-4=0$.
   Donc $2x^3-3x^2+5x-4$ est un multiple de $x-1$. Je note alors $Q(x)=ax^2+bx+c$ tel que $P(x)=(x-1)Q(x)$, *i.e.*
   $$2x^3-3x^2+5x-4=(x-1)\times\left(ax^2+bx+c\right)=ax^3+(b-a)x^2+(c-b)x-c.$$
   Alors par identification des coefficients,
   $$\begin{cases} a=2\\ b-a=-3\\ c-b=5\\ -c=-4\end{cases} \iff \begin{cases} a=2\\ b=-3+a=-3+2=-1\\ c=5+b=5-1=4\\ -c=-4 \quad \checkmark\end{cases}$$
   Ainsi $2x^3-3x^2+5x-4=(x-1)\left(2x^2-x+4\right)$.
   Je calcule le discriminant du facteur de degré 2 : $\Delta=(-1)^2-4\times2\times4=1-32=-31<0$.
   Ce facteur n'admet donc pas de racine et est de signe constant, positif puisque $a=2>0$.
   Alors le signe de $P(x)$ est donné par celui de $x-1$, *i.e.*
   $$2x^3-3x^2+5x-4<0 \iff x-1<0 \iff x<1.$$
   Donc $\mathcal{S}=\left]-\infty,1\right[$.
5. $\frac{2x+3}{x-1}+\frac{1}{x}=0 \iff \frac{(2x+3)\times x+(x-1)\times1}{(x-1)\times x}=0 \iff \frac{2x^2+4x-1}{x(x-1)}=0$
   Cette équation a deux valeurs interdites : 0 et 1.
   Je calcule le discriminant du numérateur : $\Delta=4^2-4\times2\times(-1)=16+8=24>0$.
   Le numérateur admet donc deux racines, et comme $\sqrt{24}=\sqrt{4}\times\sqrt{6}=2\sqrt{6}$, alors
   $$x_1=\frac{-4-\sqrt{24}}{2\times2}=\frac{-4-2\sqrt{6}}{4}=-1-\frac{\sqrt{6}}{2} \quad \text{et} \quad x_2=\frac{-4+2\sqrt{6}}{4}=-1+\frac{\sqrt{6}}{2}.$$
   Aucune de ces solutions n'est valeur interdite, donc $\mathcal{S}=\left\{-1-\frac{\sqrt{6}}{2},-1+\frac{\sqrt{6}}{2}\right\}$.

Exercice 2 –

1. Je calcule la limite :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} e^{x} = \ \ 0\\ \lim\limits_{x\to-\infty} -x = +\infty\end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to-\infty} e^{x}-x=+\infty.$$

2. Je calcule la limite :

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x-1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{x}=\lim_{x\to+\infty}1=1 \quad \text{et} \quad \lim_{X\to1}\ln(X)=0$$

Donc par composition, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right)=0.$

3. Je calcule la limite :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to0^+}\frac{1}{x} = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = +\infty\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to0^+} e^{\frac{1}{x}}=+\infty.$$

4. Je calcule la limite :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} -x = -\infty\end{array}\right\} \textit{Forme indéterminée.}$$

Or $\ln(x)-x=x\times\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-1\right)$ et par croissances comparées, $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln(x)}{x}=0.$
Donc

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{\ln(x)}{x}-1\right) = \ -1\end{array}\right\} \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to+\infty}\ln(x)-x=\lim_{x\to+\infty}x\times\left(\frac{\ln(x)}{x}-1\right)=-\infty.$$

5. Je calcule la limite :

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^+} 1 = \ 1\\ \lim\limits_{x\to2^+} x-2 = 0^+\end{array}\right\} \text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to2^+}\frac{1}{x-2}=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^+}\dfrac{1}{x-2} = +\infty\\ \lim\limits_{X\to+\infty}\ln(X) = +\infty\end{array}\right\} \text{Par composition,} \quad \lim_{x\to2^+}\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to2^+}\ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right) = +\infty\\ \lim\limits_{x\to2^+} 4x-1 = \ \ 7\end{array}\right\} \text{Par somme,} \quad \lim_{x\to2^+}\ln\left(\frac{1}{x-2}\right)+4x-1=+\infty.$$

Exercice 3 –

1. f est une fonction polynomiale donc $f'(x)=3x^2+4\times2x-5=3x^2+8x-5$.
2. f est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=4x-1$ et $v(x)=\ln(x)$. Comme $u'(x)=4$ et $v'(x)=\dfrac{1}{x}$, alors

$$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=4\times\ln(x)+(4x-1)\times\frac{1}{x}=4\ln(x)+4-\frac{1}{x}.$$

3. f est de la forme $\mathrm{e}^{u}+1$ avec $u(x)=2x+3$. Comme $u'(x)=2$, alors
$$f'(x)=u'(x)\,\mathrm{e}^{u(x)}+0=2\times\mathrm{e}^{2x+3}=2\,\mathrm{e}^{2x+3}.$$

4. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\mathrm{e}^{x}$ et $v(x)=x^2$. Comme $u'(x)=\mathrm{e}^{x}$ et $v'(x)=2x$, alors
$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{x^2\,\mathrm{e}^{x}-2x\,\mathrm{e}^{x}}{\left(x^2\right)^2}=\frac{x(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{x^4}=\frac{(x-2)\,\mathrm{e}^{x}}{x^3}.$$

5. f est de la forme u^2 avec $u(x)=\dfrac{x+1}{x-1}$. Alors $f'(x)=2\times u'(x)\times u(x)$.
Il me faut donc calculer $u'(x)$. u est de la forme $\dfrac{w}{v}$ avec $w(x)=x+1$ et $v(x)=x-1$.
Comme $w'(x)=1$ et $v'(x)=1$, alors
$$u'(x)=\frac{w'(x)v(x)-w(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{x-1-(x+1)}{(x-1)^2}=-\frac{2}{(x-1)^2}.$$
Ainsi
$$f'(x)=2\times\left(-\frac{2}{(x-1)^2}\right)\times\frac{x+1}{x-1}=-\frac{4(x+1)}{(x-1)^3}.$$

Exercice 4 –

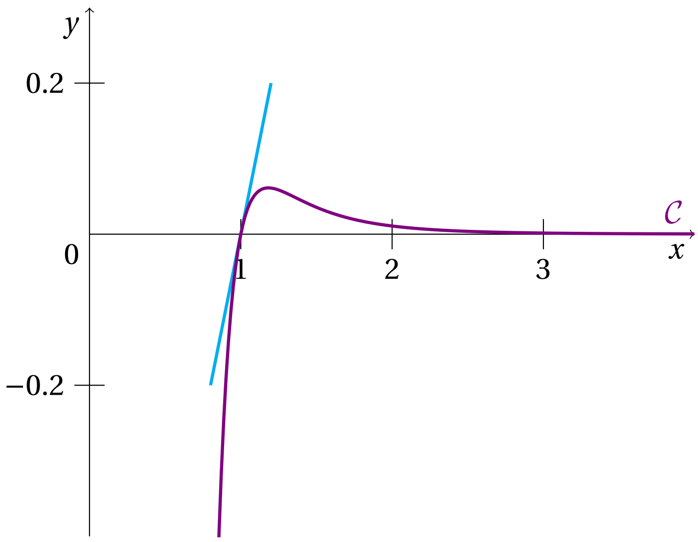
1. Je calcule les limites en 0^+ et en $+\infty$:
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to0^+}\ln(x)=-\infty\\ \lim\limits_{x\to0^+}x^5=0^+\end{array}\right\}\text{Par quotient,}\quad\lim_{x\to0^+}f(x)=-\infty.$$
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)=+\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty}x^5=+\infty\end{array}\right\}\text{Par croissances comparées,}\quad\lim_{x\to+\infty}f(x)=0^+.$$

2. f est de la forme $\dfrac{u}{v}$ avec $u(x)=\ln(x)$ et $v(x)=x^5$. Comme $u'(x)=\dfrac{1}{x}$ et $v'(x)=5x^4$, alors
$$f'(x)=\frac{u'(x)v(x)-u(x)v'(x)}{v(x)^2}=\frac{\frac{1}{x}\times x^5-\ln(x)\times5x^4}{\left(x^5\right)^2}=\frac{x^4\big(1-5\ln(x)\big)}{x^{10}}=\frac{1-5\ln(x)}{x^6}.$$
J'étudie le signe de $f'(x)$ pour obtenir les variations de f :
$$1-5\ln(x)\geqslant0\iff1\geqslant5\ln(x)\iff\frac{1}{5}\geqslant\ln(x)\iff\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}\geqslant x.$$
J'en déduis le tableau de variation suivant, avec $f\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}\right)=\dfrac{\ln\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}\right)}{\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}\right)^5}=\dfrac{\frac{1}{5}}{\mathrm{e}}=\dfrac{1}{5\,\mathrm{e}}$.

x	0		$\mathrm{e}^{\frac{1}{5}}$		$+\infty$
$1-5\ln(x)$		$+$	0	$-$	
x^6	0	$+$		$+$	
$f'(x)$	$\Vert$	$+$	0	$-$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{5\,\mathrm{e}}$	$\searrow$	0

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Ici $a = 1$ et
$$f(1) = \frac{\ln(1)}{1^5} = 0 \quad \text{et} \quad f'(1) = \frac{1-5\ln(1)}{1^6} = 1.$$
Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par
$$y = 1\times(x-1)+0, \qquad i.e. \quad y = x-1.$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



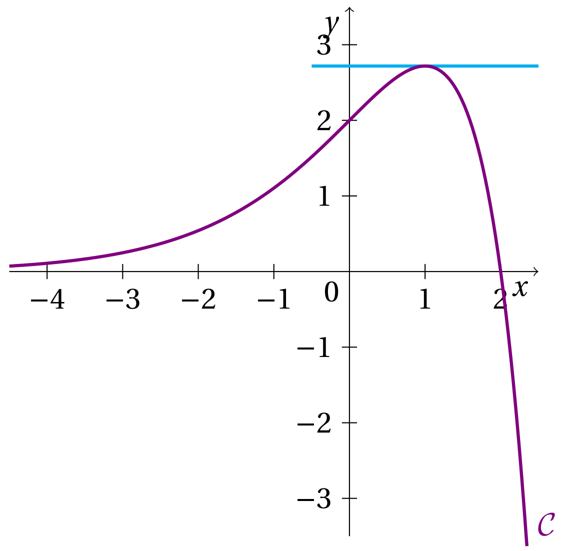
Exercice 5 –

1. Je calcule les limites en $+\infty$ et en $-\infty$:
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to+\infty} 2-x = -\infty\\ \lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty\end{array}\right\}\ \text{Par produit,} \quad \lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty.$$
$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-\infty} 2-x = +\infty\\ \lim\limits_{x\to-\infty} e^x = \ 0^+\end{array}\right\}\ \text{Par croissances comparées,} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = 0^+.$$

2. f est de la forme $u\times v$ avec $u(x) = 2-x$ et $v(x) = e^x$. Comme $u'(x) = -1$ et $v'(x) = e^x$, alors
$$f'(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = -1\times e^x + (2-x)\times e^x = (1-x)\,e^x.$$
J'étudie le signe de $f'(x)$ pour obtenir les variations de f. Or $\forall x\in\mathbb{R},\ e^x > 0$ donc
$$f'(x) \geqslant 0 \iff (1-x)\,e^x \geqslant 0 \iff 1-x \geqslant 0 \iff 1 \geqslant x.$$
J'en déduis le tableau de variation suivant, avec $f(1) = (2-1)\times e^1 = e$.

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$1-x$		$+$	0	$-$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
f	0	$\nearrow$	e	$\searrow$	$-\infty$

3. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x-a)+f(a)$.
   Ici $a=1$ et
   $$f(1)=e \quad \text{et} \quad f'(1)=(1-1)\times \mathrm{e}^1 = 0.$$
   Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par
   $$y = 0\times(x-1)+e, \qquad i.e. \quad y=e.$$
4. f' est de la forme $u\times v$ avec $u(x)=1-x$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$. Comme $u'(x)=-1$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$, alors
   $$f''(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x) = -1\times \mathrm{e}^x+(1-x)\times \mathrm{e}^x = -x\,\mathrm{e}^x.$$
   La fonction f est convexe là où sa dérivée seconde est positive.
   Or $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x>0$ donc
   $$f''(x)\geqslant 0 \iff -x\,\mathrm{e}^x\geqslant 0 \iff -x\geqslant 0 \iff x\leqslant 0.$$
   Finalement f est convexe sur $\left]-\infty,0\right]$ et concave sur $\left[0,+\infty\right[$.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet un point d'inflexion au point d'abscisse 0 : $\big(0,f(0)\big)=\big(0,2\big)$.
5. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



Exercice 6 –

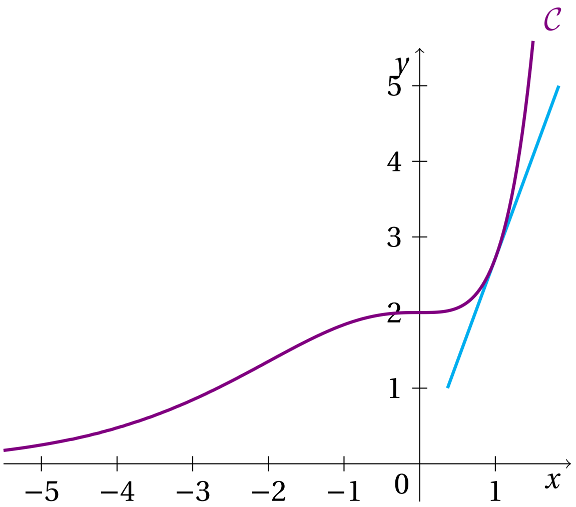
1. a) f est de la forme uv avec $u(x)=x^2-2x+2$ et $v(x)=\mathrm{e}^x$. Comme $u'(x)=2x-2$ et $v'(x)=\mathrm{e}^x$, alors
   $$f'(x)=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)=(2x-2)\times \mathrm{e}^x+\left(x^2-2x+2\right)\times \mathrm{e}^x = x^2\,\mathrm{e}^x.$$
   b) Les variations de f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée. Or $\forall x\in\mathbb{R},\ \mathrm{e}^x>0$ et $x^2\geqslant 0$.
   J'en déduis donc le tableau de variation suivant, avec $f(0)=\left(0^2-2\times 0+2\right)\times \mathrm{e}^0=2$.

x	$-\infty$		0		$+\infty$
x^2		$+$	0	$+$	
e^x		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$+$	
f	0	$\nearrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

2. L'équation de la tangente au point d'abscisse a est donnée par $y = f'(a)(x-a) + f(a)$.
Ici $a = 1$ et
$$f(1) = \left(1^2 - 2\times 1 + 2\right) \times \mathrm{e}^1 = e \quad \text{et} \quad f'(1) = 1^2 \times \mathrm{e}^1 = e.$$
Ainsi l'équation de la tangente au point d'abscisse 1 est donnée par
$$y = e \times (x-1) + e, \qquad i.e. \quad y = ex.$$

3. a) f' est de la forme $u \times v$ avec $u(x) = x^2$ et $v(x) = \mathrm{e}^x$. Comme $u'(x) = 2x$ et $v'(x) = \mathrm{e}^x$, alors
$$f''(x) = u'(x)v(x) + u(x)v'(x) = 2x \times \mathrm{e}^x + x^2 \times \mathrm{e}^x = \left(x^2 + 2x\right)\mathrm{e}^x = x(x+2)\,\mathrm{e}^x.$$
b) La fonction f est convexe là où sa dérivée seconde est positive.
Comme pour tout $\forall x \in \mathbb{R},\ \mathrm{e}^x > 0$ alors
$$f''(x) \geqslant 0 \iff x(x+2)\,\mathrm{e}^x \geqslant 0 \iff x(x+2) \geqslant 0.$$
Il s'agit de la forme factorisée d'un polynôme de degré 2 dont les racines sont -2 et 0. Comme $a = 1 > 0$ le polynôme est positif à l'extérieur de ses racines et négatif entre celles-ci. Donc f est convexe sur $]-\infty, -2]$ et sur $[0, +\infty[$ et concave sur $[-2, 0]$.
c) La courbe $\mathcal{C}$ admet deux points d'inflexion :
$$\left(-2, f(-2)\right) = \left(-2, \frac{10}{\mathrm{e}^2}\right) \quad \text{et} \quad \left(0, f(0)\right) = (0, 2).$$

4. Voici le graphe de la courbe et de sa tangente :



Exercice 7 –

1. La fonction est polynomiale donc je calcule directement :
$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right)\mathrm{d}x &= \left[3 \times \frac{x^4}{4} - 2 \times \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 4x\right]_0^1 \\ &= \left(\frac{3}{4} - \frac{2}{3} + \frac{1}{2} - 4\right) - 0 = \frac{9 - 8 + 6 - 48}{12} = -\frac{41}{12}.\end{aligned}$$

2. Je commence par calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$.
f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$ avec $u(x) = 1 + x^2$. Puisque $u'(x) = 2x$, alors
$$\frac{u'(x)}{u(x)^2} = \frac{2x}{\left(1+x^2\right)^2} = 2f(x).$$

Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x) = \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{u(x)}\right) = -\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}.$$

Et donc

$$\int_0^2 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2}\,\mathrm{d}x = \left[-\frac{1}{2\left(1+x^2\right)}\right]_0^2 = -\frac{1}{10} + \frac{1}{2} = \frac{4}{10} = \frac{2}{5}.$$

3. Je commence par calculer une primitive de $f(t) = \dfrac{t}{\sqrt{t^2+1}}$.
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$ avec $u(t) = t^2+1$. Puisque $u'(t) = 2t$, alors
   $$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}} = \frac{2t}{\sqrt{t^2+1}} = 2 \times \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} = 2f(t).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(t) = \frac{1}{2} \times 2\sqrt{u(t)} = \sqrt{u(t)} = \sqrt{t^2+1}.$$
   Et donc $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}}\,\mathrm{d}t = \left[\sqrt{t^2+1}\right]_0^1 = \sqrt{2} - \sqrt{1} = \sqrt{2} - 1.$
4. La fonction est une somme donc je calcule directement :
   $$\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1\right)\mathrm{d}x = \left[2\sqrt{x} + 2x^2 - x\right]_1^2 = \left(2\sqrt{2} + 8 - 2\right) - \left(2 + 2 - 1\right) = 2\sqrt{2} + 3.$$
5. Je commence par calculer une primitive de $f(x) = \dfrac{x^3}{x^4+3}$.
   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u}$ avec $u(x) = x^4+3$. Puisque $u'(x) = 4x^3$, alors
   $$\frac{u'(x)}{u(x)} = \frac{4x^3}{x^4+3} = 4f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{4} \times \ln\left(u(x)\right) = \frac{\ln\left(x^4+3\right)}{4}.$$
   Et donc
   $$\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{x^4+3}\,\mathrm{d}x = \left[\frac{\ln\left(x^4+3\right)}{4}\right]_{-2}^{-1} = \frac{\ln(4)}{4} - \frac{\ln(19)}{4} = \frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{4}{19}\right) = -\frac{1}{4} \times \ln\left(\frac{19}{4}\right).$$

Exercice 8 –

1. a) f est de la forme $f(x) = u(x)^3 + x$ avec $u(x) = 1 - x$. Comme $u'(x) = -1$, alors
   $$f'(x) = 3 \times (-1) \times (1-x)^2 + 1 = -3\left(x^2 - 2x + 1\right) + 1 = -3x^2 + 6x - 3 + 1 = -3x^2 + 6x - 2.$$
   Pour étudier le signe de $f'(x)$, je calcule le discriminant : $\Delta = 6^2 - 4 \times (-3) \times (-2) = 12 > 0$.
   Le polynôme admet donc deux racines, et comme $\sqrt{12} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = 2\sqrt{3}$, alors
   $$x_1 = \frac{-6-\sqrt{12}}{2 \times (-3)} = \frac{-6-2\sqrt{3}}{-6} = 1 + \frac{\sqrt{3}}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6+2\sqrt{3}}{-6} = 1 - \frac{\sqrt{3}}{3}.$$
   Je déduis le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f, avec
   $$f(0) = (1-0)^3 + 0 = 1, \qquad f(1) = (1-1)^3 + 1 = 1$$
   $$\text{et} \quad f\left(1 - \frac{\sqrt{3}}{3}\right) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^3 + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = \frac{3\sqrt{3}}{27} + 1 - \frac{\sqrt{3}}{3} = 1 + \frac{\sqrt{3} - 3\sqrt{3}}{9} = 1 - \frac{2\sqrt{3}}{9}.$$

x	0	$1-\frac{\sqrt{3}}{3}$	1
$f'(x)$	$-$	0	$+$
f	1 ↘	$1-\dfrac{2\sqrt{3}}{9}$	↗ 1

b) D'après le tableau de variation précédent, je sais que pour tout $x \in [0,1]$,

$$1-\frac{2\sqrt{3}}{9} \leqslant f(x) \leqslant 1.$$

Il ne me reste alors plus qu'à montrer que $1-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \geqslant 0$.

Comme $0 \leqslant 2\sqrt{3} \leqslant 9$, alors $0 \leqslant \dfrac{2\sqrt{3}}{9} \leqslant 1$ et donc $1-\dfrac{2\sqrt{3}}{9} \geqslant 0$.

Finalement, j'ai bien montré que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$.

2. a) Je raisonne par récurrence sur $n \geqslant 0$.

Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $u_n \in [0,1]$.

Initialisation : Pour $n=0$, $u_0 = \dfrac{4}{10}$ et $0 \leqslant \dfrac{4}{10} \leqslant 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \in [0,1]$. Or d'après la question **1.b)**, pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) \in [0,1]$. Donc $u_{n+1} = f(u_n) \in [0,1]$.
Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n=1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in [0,1].$$

b) J'étudie le signe de la différence de deux termes consécutifs : pour $n \in \mathbb{N}$,

$$u_{n+1} - u_n = (1-u_n)^3 + u_n - u_n = (1-u_n)^3 \geqslant 0 \quad \text{car } u_n \in [0,1].$$

Ainsi $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $u_{n+1} \geqslant u_n$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.

c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (d'après la question **2.b)**) et majorée par 1 (d'après la question **2.a)**). Donc selon le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge. Je note ℓ sa limite, *i.e.* $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_n$ et $\ell = \lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1}$. Alors en passant à la limite dans l'égalité $u_{n+1} = (1-u_n)^3 + u_n$, j'obtiens donc que $\ell = (1-\ell)^3 + \ell$.
Ainsi $(1-\ell)^3 = 0 \iff 1-\ell = 0 \iff \ell = 1$. Ainsi j'ai bien montré que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

Exercice 9 –

1. a) Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 12500 = 1.02u_n - 250 - 12500 = 1.02(v_n + 12500) - 250 - 12500 \\ &= 1.02v_n + 12750 - 250 - 12500 = 1.02v_n. \end{aligned}$$

Ainsi la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien géométrique, de raison $q = 1.02$.

b) La suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1.02 et son premier terme est donné par $v_0 = u_0 - 12500 = 8500 - 12500 = -4000$. Ainsi pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = -4000 \times 1.02^n.$$

c) Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n = v_n + 12500$, alors

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = 12500 - 4000 \times 1.02^n.$$

2. Comme $1.02 > 1$ et que $v_0 = -4000$ est négatif, la suite géométrique $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante. Et comme pour tout entier n, $u_n = v_n + 12500$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est aussi décroissante.
3. Comme $1.02 > 1$, alors $\lim_{n\to+\infty} 1.02^n = +\infty$ et par somme,

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = \lim_{n\to+\infty} 12500 - 4000 \times 1.02^n = -\infty.$$

Exercice 10 –

1. a) D'après l'énoncé,

$$P(H) = \frac{52}{100} = \frac{13}{25}, \qquad P_H(\overline{S}) = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}, \qquad P_F(S) = \frac{916}{1000} = \frac{229}{250},$$

$$P(F) = 1 - P(H) = 1 - \frac{13}{25} = \frac{12}{25}, \qquad P_H(S) = 1 - P_H(\overline{S}) = 1 - \frac{3}{20} = \frac{17}{20}$$

$$\text{et} \quad P_F(\overline{S}) = 1 - P_F(S) = 1 - \frac{229}{250} = \frac{21}{250}.$$

b) D'après la formule des probabilités composées,

$$P\big(F \cap S\big) = P(F) \times P_F(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} \approx 0.44.$$

Ainsi environ 44% des personnes qui exercent un emploi sont des femmes salariées.

c) D'après la formule des probabilités totales, comme $\{F, H\}$ forme un système complet d'événements, alors

$$P(S) = P(F)P_F(S) + P(H)P_H(S) = \frac{12}{25} \times \frac{229}{250} + \frac{13}{25} \times \frac{17}{20} \approx 0.44 + \frac{221}{500} \approx 0.88.$$

d) Je cherche $P_S(H)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_S(H) = \frac{P\big(H \cap S\big)}{P(S)} \approx \frac{0.44}{0.88} = 0.5.$$

2. a) Il s'agit de la répétition de $n = 40$ épreuves de Bernoulli de succès "la femme travaille à temps partiel", de probabilité $p = 0.3$, identiques et indépendantes. La variable aléatoire X compte le nombre de succès donc X suit une loi binomiale de paramètres $n = 40$ et $p = 0.3$. Le support de X est donné par $X(\Omega) = [\![0, 40]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times (1-p)^{n-k} = \binom{40}{k} \times 0.3^k \times 0.7^{40-k}.$$

b) Puisque X suit une loi binomiale, $E(X) = np = 40 \times 0.3 = 12$. Cela signifie qu'en moyenne, pour chaque échantillon de 40 femmes, 12 travaillent à temps partiel.

c) Je cherche $P(X = 12)$. En appliquant la formule de la question **2.a)**, j'obtiens que

$$P(X = 12) = \binom{40}{12} \times 0.3^{12} \times 0.7^{28}.$$

Exercice 11 –

1. Le support est l'ensemble des issues possibles. Ici deux boules sont tirées donc il peut y en avoir 0, 1 ou 2 rouges, *i.e.* $X(\Omega) = \{0,1,2\}$. Pour tout $k \in \{0,1\}$, je note R_k, V_k et B_k les événements "obtenir une boule rouge au k-ième tirage", "obtenir une boule verte au k-ième tirage" et "obtenir une boule bleue au k-ième tirage".
D'après la formule des probabilités composées,
$$P(X=2) = P(R_1 \cap R_2) = P(R_1) \times P_{R_1}(R_2) = \frac{3}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$
Les tirages possibles n'amenant aucune boule rouge sont les suivants : $V_1 \cap V_2$, $V_1 \cap B_2$ et $B_1 \cap V_2$. Donc
$$P(X=0) = P(V_1) \times P_{V_1}(V_2) + P(V_1) \times P_{V_1}(B_2) + P(B_1) \times P_{B_1}(V_2) = \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} + \frac{1}{6} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}.$$
Enfin
$$P(X=1) = 1 - P(X=2) - P(X=0) = 1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{5} = \frac{3}{5}.$$
Tout ceci est résumé dans le tableau suivant :

k	0	1	2
$P(X=k)$	$\frac{1}{5}$	$\frac{3}{5}$	$\frac{1}{5}$

2. Grâce aux valeurs du tableau,
$$E(X) = 0 \times \frac{1}{5} + 1 \times \frac{3}{5} + 2 \times \frac{1}{5} = \frac{5}{5} = 1.$$
Pour la variance, je commence par calculer $E(X^2)$. Grâce au théorème de transfert,
$$E(X^2) = 0^2 \times \frac{1}{5} + 1^2 \times \frac{3}{5} + 2^2 \times \frac{1}{5} = \frac{7}{5}.$$
Puis d'après la formule de König-Huygens,
$$V(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{7}{5} - 1^2 = \frac{2}{5}.$$

3. La formule de la fonction de répartition est donnée par $F_X(x) = P(X \leqslant x)$. Donc
$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ \frac{1}{5} & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ \frac{4}{5} & \text{si } 1 \leqslant x < 2, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 2. \end{cases}$$