INTERRO DE RENTRÉE

Exercice 1 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $4x-5=-2x+3$
2. $x+4\leqslant -2x+5$
3. $2x^2-7x+3=x^2+3x-18$
4. $2x^3-3x^2+5x-4<0$
5. $\dfrac{2x+3}{x-1}+\dfrac{1}{x}=0$

Exercice 2 – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x - x$
2. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+} \mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$
4. $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)-x$
5. $\lim\limits_{x\to 2^+} \ln\left(\dfrac{1}{x-2}\right)+4x-1$

Exercice 3 – Calculer les dérivées des fonctions suivantes.

1. $f(x)=x^3+4x^2-5x+2$
2. $f(x)=(4x-1)\ln(x)$
3. $f(x)=\mathrm{e}^{2x+3}+1$
4. $f(x)=\dfrac{\mathrm{e}^x}{x^2}$
5. $f(x)=\left(\dfrac{x+1}{x-1}\right)^2$

Exercice 4 – Soient f la fonction définie sur $]0,+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{\ln(x)}{x^5}$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f aux bornes de son ensemble de définition.
2. Montrer que $f'(x)=\dfrac{1-5\ln(x)}{x^6}$. En déduire le tableau de variation de f.
3. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Sur un même graphique, tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 5 – Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=(2-x)\,\mathrm{e}^x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. Étudier les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
2. Montrer que $f'(x)=(1-x)\,\mathrm{e}^x$. En déduire le tableau de variation de f.
3. Donner l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe représentative de f au point d'abscisse 1.
4. Calculer $f''(x)$ puis étudier la convexité de la fonction f.
   La courbe $\mathcal{C}$ admet-elle un point d'inflexion ?
5. Sur un même graphique, tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 6 – Soient f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\left(x^2-2x+2\right)\mathrm{e}^x$ et $\mathcal{C}$ sa courbe représentative.

1. a) Montrer que pour tout $x\in\mathbb{R}$, $f'(x)=x^2\,\mathrm{e}^x$.
   b) Étudier les variations de la fonction f.
2. Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 1.
3. a) Calculer $f''(x)$.
   b) Étudier la convexité de f.
   c) Calculer les coordonnées des points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$.
4. Sur un même graphique, tracer la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 7 – Calculer les intégrales suivantes.

1. $\displaystyle\int_0^1 \left(3x^3 - 2x^2 + x - 4\right) \mathrm{d}x$
2. $\displaystyle\int_0^2 \frac{x}{\left(1+x^2\right)^2} \mathrm{d}x$
3. $\displaystyle\int_0^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} \mathrm{d}t$
4. $\displaystyle\int_1^2 \left(\frac{1}{\sqrt{x}} + 4x - 1\right) \mathrm{d}x$
5. $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{x^3}{x^4+3} \mathrm{d}x$

Exercice 8 – Soit f la fonction définie sur $[0,1]$ par $f(x) = (1-x)^3 + x$.

1. a) Calculer $f'(x)$ puis étudier les variations de f.
   b) Montrer que pour tout $x \in [0,1]$, $\quad f(x) \in [0,1]$.
2. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = \dfrac{4}{10}$ et $u_{n+1} = f(u_n)$.
   a) Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \in [0,1]$.
   b) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante.
   c) La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge-t-elle ? Si oui, déterminer sa limite.

Exercice 9 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 8500$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = 1.02u_n - 250$.

1. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie pour tout entier naturel n par $v_n = u_n - 12500$.
   a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique dont on précisera la raison.
   b) Exprimer v_n en fonction de n.
   c) En déduire l'expression de u_n en fonction de n.
2. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Calculer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 10 – D'après une enquête sur l'emploi en France, 52% des personnes qui exercent un emploi sont des hommes, 15% des hommes qui exercent un emploi ne sont pas des salariés et 91.6% des femmes qui exercent un emploi sont salariées.

1. On interroge au hasard une personne ayant un emploi. On note H l'événement "la personne est un homme", F l'événement "la personne est une femme" et S l'événement "la personne exerce un emploi salarié".
   a) Donner les valeurs des probabilités $P(F)$, $P(H)$, $P_H(S)$, $P_H(\overline{S})$, $P_F(S)$, $P_F(\overline{S})$.
   b) Calculer $P(F \cap S)$. Interpréter le résultat.
   c) Calculer la probabilité qu'une personne exerce un emploi salarié.
   d) La personne interrogée exerce un emploi salarié.
   Quelle est la probabilité que ce soit un homme ?
2. Selon cette étude, 30% des femmes qui ont un emploi travaillent à temps partiel. On choisit au hasard 40 femmes qui ont un emploi et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de femmes qui travaillent à temps partiel.
   a) Quelle est la loi suivie par X ? Donner le support $X(\Omega)$
   et une formule permettant de calculer $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   b) Calculer l'espérance de X. Interpréter le résultat.
   c) Déterminer la probabilité que dans ce groupe,
   il y ait exactement 12 femmes qui travaillent à temps partiel.

Exercice 11 – On considère une urne contenant trois boules rouges, deux boules vertes et une boule bleue. On tire deux boules successivement et sans remise. On note X le nombre de boules rouges obtenues.

1. Donner le support $X(\Omega)$ de X et calculer la loi de X.
2. Calculer l'espérance et la variance de X.
3. Donner l'expression de la fonction de répartition F_X et sa représentation graphique.