EXERCICES — CHAPITRE 7

Exercice 1 (★★) – Pour chacune des fonctions f définies ci-dessous, montrer que f est une densité de probabilité.

1. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{4}{x^5} & \text{si } x \geqslant 1, \\ 0 & \text{si } x < 1. \end{cases}$
2. $f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$
3. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{3} & \text{si } -1 \leqslant x < 0, \\ \dfrac{2}{3} & \text{si } 0 \leqslant x < 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

Exercice 2 (★★) – Déterminer l'unique nombre $a \in \mathbb{R}$ tel que la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} ax(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

soit une densité de probabilité.

Exercice 3 (★★) – Pour chacune des fonctions f de l'Exercice 1, déterminer la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X de densité f.

Exercice 4 (★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 2x & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X dont f est la densité.
3. Calculer $P\left(X \leqslant \dfrac{1}{2}\right)$, $P\left(\dfrac{1}{4} \leqslant X \leqslant \dfrac{3}{4}\right)$ et $P\left(X > \dfrac{9}{10}\right)$.

Exercice 5 (★★) – On considère la fonction f définie par $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \leqslant 1, \\ \dfrac{1}{x^2} & \text{si } x > 1. \end{cases}$

1. Justifier que f est une densité.
2. Soit X une variable aléatoire de densité f. Déterminer les probabilités suivantes.
   a) $P(X \leqslant 0)$,
   b) $P(X \leqslant 1)$,
   c) $P(X > 1)$,
   d) $P(X \leqslant 2)$,
   e) $P(X \leqslant 3)$,
   f) $P\big(X \in]2,3[\big)$.

Exercice 6 (★★) – La nuit, dans la savane, un lion se rend à la rivière pour boire et y reste un quart d'heure. Après de nombreuses observations, on estime que l'instant d'arrivée T du lion à la rivière se situe entre 0h (minuit) et 2h du matin. La variable aléatoire T, exprimée en heures, est une variable aléatoire dont une densité de probabilité est la fonction f définie par $f(t) = \dfrac{3}{4}t(2-t)$ si $0 \leqslant t \leqslant 2$ et $f(t) = 0$ sinon.

1. Vérifier que f est une densité de probabilité.
2. Un observateur se présente à la rivière à 0h30 et y reste un quart d'heure.
   Quelle est la probabilité pour qu'il aperçoive le lion ?

Exercice 7 (★★) – Pour chacune des fonctions f de l'Exercice 1, on considère une variable aléatoire X de densité f. Montrer que X admet une espérance et la calculer.

Exercice 8 (★★) – Pour chacune des fonctions f de l'Exercice 1, on considère une variable aléatoire X de densité f. Montrer que X admet une variance et la calculer.

Exercice 9 (★★★) – Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \begin{cases} 6x(1-x) & \text{si } x \in [0,1], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Montrer que f est une densité de probabilité.
2. Déterminer la fonction de répartition F_X d'une variable aléatoire X dont f est densité.
3. Déterminer l'espérance de X.
4. On pose $Y = 3X+2$. Alors Y est à densité. Déterminer sa fonction de répartition F_Y.
5. Déterminer une densité f_Y de Y.
6. Déterminer l'espérance de Y.

Exercice 10 (★★) – Soit X une variable aléatoire qui suit une loi uniforme sur $[1,2]$.
On note Y la variable aléatoire définie par $Y = 3X$. Le but de cet exercice est de déterminer la loi de Y. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
2. Justifier que pour tout réel y, $F_Y(y) = F_X\left(\dfrac{y}{3}\right)$.
3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$.
4. En déduire la loi de Y.

Exercice 11 (★★) – Soit X une variable aléatoire qui suit une loi exponentielle de paramètre 1. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = \dfrac{1}{2}X$. L'objectif est de déterminer la loi de Y. On note F_X la fonction de répartition de X et F_Y la fonction de répartition de Y.

1. Déterminer pour tout réel x, l'expression de $F_X(x)$.
2. Justifier que pour tout réel y, $F_Y(y) = F_X(2y)$.
3. En déduire pour tout réel y, l'expression de $F_Y(y)$ en distinguant les cas $y < 0$ et $y \geqslant 0$.
4. En déduire la loi de Y.
5. Déterminer $P(Y \leqslant 3)$ et $P_{[Y \leqslant 3]}(Y > 1)$.

Exercice 12 (★★) – Le fonctionnement d'une machine est perturbé par des pannes.
On considère les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 définies par

- X_1 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la mise en route de la machine et la première panne,
- X_2 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la première panne et la panne suivante,
- X_3 est le temps, exprimé en heures, écoulé entre la remise en route de la machine après la deuxième panne et la panne suivante.

Après la troisième panne, l'utilisation de la machine est suspendue.
On suppose que les variables aléatoires X_1, X_2 et X_3 sont mutuellement indépendantes et suivent toutes les trois une loi exponentielle de paramètre $\frac{1}{2}$.

1. Quelle est la durée moyenne de fonctionnement de la machine entre la mise en route de la machine et la première panne ?
   Entre la remise en route de la machine après la première panne et la deuxième panne ?
   Entre la remise en route de la machine après la deuxième panne et la troisième panne ?
2. Déterminer la probabilité de l'événement E : « chacune des trois périodes de fonctionnement de la machine dure plus de 2 heures ».

Exercice 13 (★★★) – [ESCP 2014 / Ex1]
Soient a un réel strictement positif et f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ à valeurs réelles telle que

$$f(t) = \begin{cases} 2e^{-2(t-a)} & \text{si } t \geqslant a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. a) Soit B un réel supérieur ou égal à a. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_a^B 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.
   b) En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_a^{+\infty} 2e^{-2(t-a)}\,\mathrm{d}t$.
2. Montrer que f peut être considérée comme une densité de probabilité.

Dans la suite, on note X une variable aléatoire admettant f comme densité.

3. Montrer que la fonction de répartition F_X de X est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 1 - e^{-2(x-a)} & \text{si } x \geqslant a, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

4. On note Y la variable aléatoire définie par $Y = X - a$.
   a) Déterminer la fonction de répartition F_Y de Y.
   b) En déduire que Y suit une loi exponentielle dont on précisera le paramètre.
   c) Donner la valeur de l'espérance de Y.
   d) En déduire que X admet une espérance et donner sa valeur.

Exercice 14 (★★★) – [BSB 2010 / Ex4]

Soit f la fonction réelle définie par $f(t) = \begin{cases} \frac{1}{2}t & \text{si } t \in \left]0,2\right], \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. a) Montrer que f est continue en 0. Montrer que f est une densité de probabilité.
   b) On note désormais X une variable de densité f et on note F sa fonction de répartition. Rappeler l'intégrale permettant de calculer $F(x)$ en fonction de la densité f.
   Calculer $F(x)$ en séparant les cas $x \leqslant 0$, $0 < x \leqslant 2$ et $x > 2$.
   c) Calculer la probabilité $P(X \leqslant 1)$ et la probabilité $P\left(\frac{1}{2} < X \leqslant 1\right)$.
   d) Justifier que $X(\Omega) = \left]0,2\right]$.
2. Déterminer l'espérance de X.

Soient U la variable aléatoire définie par $U = X^2$ et G sa fonction de répartition.

3. Déterminer $U(\Omega)$ puis justifier que si $x \leqslant 0$, $G(x) = 0$ et si $x > 4$, $G(x) = 1$.
4. a) Justifier l'égalité des événements $[U \leqslant 2]$ et $[-\sqrt{2} \leqslant X \leqslant \sqrt{2}]$ puis en déduire $G(2)$.
   b) Plus généralement, montrer que si $0 < x \leqslant 4$, $G(x) = \frac{1}{4}x$.
   c) Dresser un bilan pour la fonction G puis reconnaître la loi de U.
   d) En déduire l'espérance $E(U)$ puis la valeur de la variance de X.

Exercice 15 (★) –

1. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$.
   a) Calculer $P(X < 0)$.
   b) Calculer $P(X > 3)$.
   c) Calculer $P(-1.96 < X < 1.96)$.
2. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale réduite $\mathcal{N}(-3,1)$.
   a) Calculer $P(X < -1)$.
   b) Calculer $P(X > -5)$.
   c) Calculer $P(-5 < X < -1)$.
3. Soit X une variable aléatoire qui suit la loi normale $\mathcal{N}(8,4)$.
   a) Calculer $P(X < 7.5)$.
   b) Calculer $P(X > 8.5)$.
   c) Calculer $P(6.5 < X < 10)$.

Exercice 16 (★★) – La variable aléatoire qui correspond aux commandes quotidiennes en antalgiques (aspirine, ibuprofène...) suit une loi normale d'espérance 250 et d'écart-type 20. Le stock disponible en début de matinée est de 300 antalgiques. Quelle est la probabilité qu'il y ait rupture de stock ?