

## EXERCICES — CHAPITRE 6

### Intégration sur un segment

**Exercice 1** (★) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction  $f$ .

- |                                                   |                                               |
|---------------------------------------------------|-----------------------------------------------|
| 1. $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 4x - 1$ sur $\mathbb{R}$ | 3. $f(x) = e^{2x} + e^{-2x}$ sur $\mathbb{R}$ |
| 2. $f(x) = -\frac{3}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$     | 4. $f(x) = \frac{2}{x^3}$ sur $\mathbb{R}^*$  |

**Exercice 2** (★★) – Dans chacun des cas suivants, déterminer une primitive de la fonction  $f$ .

- |                                                          |                                                                                               |
|----------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------|
| 1. $f(x) = 2xe^{x^2+1}$ sur $\mathbb{R}$                 | 4. $f(x) = \frac{1}{x\sqrt{1+\ln(x)}} \operatorname{sur} \left] \frac{1}{e}, +\infty \right[$ |
| 2. $f(x) = \frac{2x+1}{(x^2+x+1)^2}$ sur $\mathbb{R}$    | 5. $f(x) = \frac{x+1}{(x^2+2x+3)^4}$ sur $\mathbb{R}$                                         |
| 3. $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^{2x}-1}$ sur $\mathbb{R}_+^*$ | 6. $f(x) = \frac{\ln(x)}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$                                             |

**Exercice 3** (★★) – On considère la fonction  $f: x \mapsto \frac{1}{x^2-2x-3}$ .

1. On note  $\alpha$  et  $\beta$  les deux racines de la fonction  $P: x \mapsto x^2 - 2x - 3$ . Déterminer  $\alpha$  et  $\beta$ .
2. Montrer qu'il existe deux réels  $a$  et  $b$  tels que

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{\alpha, \beta\}, \quad f(x) = \frac{a}{x-\alpha} + \frac{b}{x-\beta}.$$

3. En déduire une primitive de  $f$  sur tout intervalle inclus dans son domaine de définition.

**Exercice 4** (★★) – Calculer les intégrales suivantes.

- |                                                  |                                         |
|--------------------------------------------------|-----------------------------------------|
| 1. $I_1 = \int_0^1 (4x^3 - 3x^2 + 2x + 1) dx$    | 4. $I_4 = \int_{-2}^{-1} (4x-1)^3 dx$   |
| 2. $I_2 = \int_0^2 (e^{2x} + e^{-x}) dx$         | 5. $I_5 = \int_1^2 \frac{x}{1+3x^2} dx$ |
| 3. $I_3 = \int_{-1}^1 \frac{t}{\sqrt{t^2+1}} dt$ | 6. $I_6 = \int_0^1 e^{2x-1} dx$         |

**Exercice 5** (★★★) – Calculer les intégrales suivantes en utilisant une intégration par parties.

- |                                   |                                                |
|-----------------------------------|------------------------------------------------|
| 1. $I_7 = \int_0^1 te^{2t} dt$    | 3. $I_9 = \int_1^4 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}} dt$ |
| 2. $I_8 = \int_1^2 t^2 \ln(t) dt$ | 4. $I_{10} = \int_0^1 (x^2+1)e^{3x} dx$        |

**Exercice 6** (★★★) – L'objectif est de calculer les intégrales

$$I = \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x^2+2}} dx, \quad J = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{x^2+2}} dx \quad \text{et} \quad K = \int_0^1 \sqrt{x^2+2} dx.$$

1. **Calcul de  $I$ .**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $[0, 1]$  par  $f(x) = \ln(x + \sqrt{x^2+2})$ .

- a) Calculer la dérivée de  $f$ .
- b) En déduire la valeur de  $I$ .

2. **Calcul de  $J$  et de  $K$ .**

- a) Sans calculer explicitement les intégrales  $J$  et  $K$ , vérifier que  $J+2I=K$ .
- b) À l'aide d'une intégration par parties portant sur  $K$ , montrer que  $K = \sqrt{3} - J$ .
- c) En déduire les valeurs de  $J$  et  $K$ .

**Exercice 7** (★★) – Pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ , on pose  $u_n = \int_0^1 \frac{x^n}{(1+x^2)^2} dx$ .

1. Calculer  $u_1$ .
2. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$  et tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{x^n}{(1+x^2)^2} \leq x^n$ .
3. En déduire que pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ ,  $0 \leq u_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
4. Étudier la convergence de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ .

**Exercice 8** (★★★) – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_1^e \ln(x)^n dx$ .

1. Calculer  $I_0$  et  $I_1$ .
2. Étudier la monotonie de la suite  $(I_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et montrer qu'elle converge. Soit  $\ell$  sa limite.
3. Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = e - (n+1)I_n$ .
4. En déduire pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $0 \leq I_n \leq \frac{e}{n+1}$ .
5. En déduire la valeur de  $\ell$ .

**Exercice 9** (★★★) – Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $I_n = \int_0^1 \frac{x^n}{1+x^n} dx$ .

1. Montrer que pour tout  $x \in [0, 1]$ ,  $0 \leq \frac{x^n}{1+x^n} \leq x^n$ .
2. Calculer  $\int_0^1 x^n dx$  puis en déduire que  $0 \leq I_n \leq \frac{1}{n+1}$ .
3. Déterminer la limite de la suite  $(I_n)_{n \geq 0}$ .
4. En déduire que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \frac{1}{1+x^n} dx = 1$ .

5. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on pose  $J_n = nI_n$ .

a) Montrer que  $J_n = \ln(2) - \int_0^1 \ln(1+x^n) dx$ .

*Indication : Penser à une intégration par parties.*

b) Montrer que pour tout  $t \geq 0$ ,  $0 \leq \ln(1+t) \leq t$ .

c) En déduire la limite de la suite  $(J_n)_{n \geq 0}$ .

### Intégrales généralisées

**Exercice 10** (★★) – Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1.  $\int_1^{+\infty} \frac{2}{x^5} dx$

2.  $\int_0^{+\infty} xe^{-x^2} dx$

3.  $\int_{-\infty}^0 e^{2t} dt$

4.  $\int_0^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^3} dt$

5.  $\int_1^{+\infty} \frac{t^2}{1+t^3} dt$

6.  $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(x)}{x} dx$

**Exercice 11** (★★) – Déterminer la nature des intégrales généralisées suivantes.

1.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{(1+e^x)^2} dx$

2.  $\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^x}{1+e^x} dx$

**Exercice 12** (★★★) – Déterminer trois réels  $a, b$  et  $c$  tels que

$$\forall x \geq 1, \quad \frac{1}{x(1+x)^2} = \frac{a}{x} + \frac{b}{1+x} + \frac{c}{(1+x)^2}.$$

En déduire l'existence et la valeur de l'intégrale généralisée  $\int_1^{+\infty} \frac{1}{x(1+x)^2} dx$ .

**Exercice 13** (★★★) –

1. À l'aide d'une intégration par parties, donner la valeur de l'intégrale  $\int_0^A xe^{-x} dx$  puis calculer

$$\lim_{A \rightarrow +\infty} \int_0^A xe^{-x} dx.$$

2. Que peut-on en déduire pour l'intégrale  $\int_0^{+\infty} xe^{-x} dx$ ?

**Exercice 14** (★★) – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} \frac{2}{x^3} & \text{si } x \geq 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

1. Calculer pour tout réel  $A$  strictement supérieur à 1 l'intégrale  $I_A = \int_1^A \frac{2}{x^3} dx$ .

2. Calculer  $\lim_{A \rightarrow +\infty} I_A$ .

3. En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et déterminer sa valeur.

**Exercice 15** (★★★) – Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ xe^{-\frac{x^2}{2}} & \text{si } x \geq 0. \end{cases}$

1. Calculer la dérivée de la fonction  $g$  définie pour tout réel  $x$  positif ou nul par  $g(x) = e^{-\frac{x^2}{2}}$ .

2. Soit  $M$  un réel strictement positif. On pose  $I(M) = \int_0^M xe^{-\frac{x^2}{2}} dx$ .

Déduire de la question précédente la valeur de  $I(M)$  puis calculer  $\lim_{M \rightarrow +\infty} I(M)$ .

3. En déduire que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx$  converge et déterminer sa valeur.

**Exercice 16** (★★★) – [Extrait d'ÉCRICOME 2016 / Ex2]

On pose  $I_0 = \int_1^{+\infty} e^{-x} dx$  et pour tout entier naturel  $n$  non nul,  $I_n = \int_1^{+\infty} x^n e^{-x} dx$ .

1. Montrer que  $I_0$  est une intégrale convergente égale à  $\frac{1}{e}$ .

2. À l'aide d'une intégration par parties, montrer que pour tout réel  $M \geq 1$ ,

$$\int_1^M x^{n+1} e^{-x} dx = -\frac{M^{n+1}}{e^M} + \frac{1}{e} + \int_1^M (n+1)x^n e^{-x} dx.$$

3. En raisonnant par récurrence et à l'aide des questions précédentes, montrer que pour tout entier naturel  $n$ , l'intégrale  $I_n$  converge.

4. Montrer que pour tout entier  $n \in \mathbb{N}$ ,  $I_{n+1} = \frac{1}{e} + (n+1)I_n$ .

5. Calculer  $I_n$  pour  $n \in \{1, 2, 3\}$ .