Exercices — Chapitre 5

Exercice 1 (⋆) –

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ est inversible, d'inverse $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 2 & -5 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}$.
2. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{pmatrix}$.

   Calculer le produit $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
3. On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 3 & -2 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 4 \\ 8 & 7 & -2 \\ 12 & 4 & -3 \end{pmatrix}$.

   Calculer le produit $P \times Q$. En déduire que P est inversible et donner son inverse.
4. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $A^3 - A$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 2 (⋆⋆) – On note $I = I_3$ et on considère $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & -1 & 2 \\ -2 & -2 & 0 \end{pmatrix}$.

1. a) Calculer A^2 puis A^3.
   b) En déduire que A n'est pas inversible.
2. a) Calculer $(I - A)(I + A + A^2)$.
   b) En déduire que $I - A$ est inversible et donner son inverse.
3. Par un raisonnement similaire, montrer que $I + A$ est inversible et donner son inverse.

Exercice 3 (⋆⋆) –

1. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer A^2.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
2. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 2 \\ 5 & -3 & 3 \\ -1 & 0 & -2 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $-A^3 - 3A^2 - 3A$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.
3. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{pmatrix}$.
   a) Calculer $A^2 - 3A + 2I_3$.
   b) La matrice A est-elle inversible ? Si oui, donner son inverse.

Exercice 4 (⋆⋆) – On considère les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ -5 & 9 & -3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$.

1. Calculer A^3. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Calculer B^3. La matrice B est-elle inversible ?

Exercice 5 (⋆⋆) – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

En résolvant un système, montrer que la matrice A est inversible et calculer son inverse.

Exercice 6 (⋆ ⋆ ⋆) – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

1. Démontrer que cette matrice est inversible et calculer son inverse.
2. Résoudre le système linéaire : $\begin{cases} y + z = 1 \\ x + z = 2 \\ x + y = 3 \end{cases}$

Exercice 7 (⋆ ⋆ ⋆) –

1. Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ -3 & 4 & -8 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.
2. Résoudre les systèmes suivants :

$$\begin{cases} -3x + y + 2z = 4 \\ x - y + 2z = -2 \\ -3x + 4y - 8z = 4 \end{cases} \quad \text{et} \quad \begin{cases} -3x + y + 2z = 1 \\ x - y + 2z = 0 \\ -3x + 4y - 8z = 3 \end{cases}$$

Exercice 8 (⋆⋆⋆) – Les matrices suivantes sont-elles inversibles ? Si oui, calculer leur inverse.

1. $A = \begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 3 & 6 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$
3. $C = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$
4. $D = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -2 & 7 & 2 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$
5. $E = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$
6. $F = \begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$
7. $G = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$
8. $H = \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Exercice 9 ($\star\star\star$) – Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les suites définies par la donnée de $x_0 = 1$, $y_0 = 0$ et les relations de récurrence valables pour tout entier $n \in \mathbb{N}$:

$$x_{n+1} = \frac{1}{3}x_n + \frac{3}{4}y_n \quad \text{et} \quad y_{n+1} = \frac{2}{3}x_n + \frac{1}{4}y_n.$$

On pose pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, $\quad U_n = \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix}$.

1. a) Donner U_0.
   b) Déterminer une matrice A telle que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad U_{n+1} = AU_n$.
   c) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad U_n = A^n U_0$.
2. On pose $P = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ 8 & -1 \end{pmatrix}$. Vérifier que P est inversible et que $P^{-1} = \dfrac{1}{17}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 8 & -9 \end{pmatrix}$.
3. Soit $D = P^{-1}AP$.
   a) Calculer D, puis pour tout entier $n \geqslant 0$, exprimer D^n en fonction de n.
   b) Montrer que $A = PDP^{-1}$.
4. a) Montrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 0$, $\quad A^n = PD^nP^{-1}$.
   b) En déduire l'expression de A^n en fonction de n.
   c) Déterminer x_n et y_n en fonction de n, puis les limites $\lim\limits_{n\to+\infty} x_n$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} y_n$.

Exercice 10 ($\star\star\star$) – [BSB 2008 / Ex1] *Une maladresse de l'énoncé est corrigée dans la Partie A.*
Soient les matrices

$$A = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}, \quad D = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad X_1 = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Partie A

1. Montrer que la matrice P est inversible et déterminer son inverse.
2. Déterminer D^k pour tout entier naturel k.
3. Montrer que $A = PDP^{-1}$ et *(en déduire par récurrence)* que pour tout entier naturel k,
$$A^k = PD^kP^{-1}.$$
4. Déterminer $P^{-1}X_1$ et en déduire ~~par récurrence~~ que pour tout entier naturel k,
$$A^kX_1 = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \\ 1 - \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^k \end{pmatrix}.$$

Partie B

On étudie le comportement d'un consommateur M à partir d'une semaine donnée (appelée "semaine 1"). Ce consommateur choisit chaque semaine chez le pâtissier un dessert parmi les trois desserts A, B et C.
On considère en outre que :

- Si M a choisi le dessert A la semaine n, alors la semaine $n+1$, il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert C avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert B la semaine n, alors la semaine $n+1$, il choisit :
  le dessert A avec une probabilité de $\frac{1}{3}$ ou le dessert B avec une probabilité de $\frac{2}{3}$.
- Si M a choisi le dessert C la semaine n, il reprend le dessert C la semaine $n+1$.
- Le consommateur choisit de manière équiprobable son dessert la première semaine.

On note pour tout entier naturel non nul n,

- A_n l'événement : "M a choisi le dessert A la n-ième semaine",
- B_n l'événement : "M a choisi le dessert B la n-ième semaine",
- C_n l'événement : "M a choisi le dessert C la n-ième semaine".

On note aussi
$$U_n = \begin{pmatrix} P(A_n) \\ P(B_n) \\ P(C_n) \end{pmatrix}.$$

1. Donner $P(A_1)$, $P(B_1)$, $P(C_1)$ ainsi que les probabilités suivantes : $P_{A_n}(A_{n+1})$, $P_{A_n}(B_{n+1})$, $P_{A_n}(C_{n+1})$, $P_{B_n}(A_{n+1})$, $P_{B_n}(B_{n+1})$, $P_{B_n}(C_{n+1})$, $P_{C_n}(A_{n+1})$, $P_{C_n}(B_{n+1})$, $P_{C_n}(C_{n+1})$.
2. À l'aide de la formule des probabilités totales, justifier avec soin que
$$P(A_{n+1}) = \frac{1}{3}P(A_n) + \frac{1}{3}P(B_n).$$
Donner de même des relations exprimant $P(B_{n+1})$ et $P(C_{n+1})$ en fonction de $P(A_n)$, $P(B_n)$ et $P(C_n)$.
3. a) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\quad U_{n+1} = AU_n$.
   b) Montrer que pour tout entier naturel non nul n, $\quad U_n = A^{n-1}X_1$.
4. En déduire, en fonction de n, la probabilité $P(A_n)$ ainsi que sa limite lorsque n tend vers $+\infty$.