5 Matrices inversibles

Dans ce chapitre, toutes les matrices sont **carrées** et $n \in \mathbb{N}^*$ désigne un entier non nul.

I – Matrices inversibles

Définition 5.1 – Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée.
On dit que A **inversible** si et seulement s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ telle que

$$A \times B = I_n \quad \text{et} \quad B \times A = I_n.$$

Lorsqu'une telle matrice B existe, elle est appelée **inverse** de A et est notée A^{-1}.

Remarque 5.2 –

- La notion de matrice inversible n'a de sens **QUE pour des matrices carrées**.
- Une matrice inversible admet une unique matrice inverse.
Soient $B_1 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $B_2 \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices telles que $AB_1 = B_1A = I_n$ et $AB_2 = B_2A = I_n$.
Alors en particulier $B_1AB_2 = (B_1A)B_2 = I_nB_2 = B_2$ et $B_1AB_2 = B_1(AB_2) = B_1I_n = B_1$. Donc $B_1 = B_2$.

Exemple 5.3 – Vérifier les assertions suivantes.

1. La matrice identité est inversible et $I_n^{-1} = I_n$.
Il me suffit de vérifier que
$$I_n \times I_n = I_n \quad \text{et} \quad I_n \times I_n = I_n.$$

2. La matrice $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$.
En calculant les produits, j'obtiens bien l'identité les deux fois :
$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & -2+2 \\ 1-1 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$$
$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 1-1 \\ -2+2 & -1+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$
Remarque : Comme le résultat est attendu, je fais bien l'effort de détailler les calculs.

3. La matrice carrée nulle 0_n n'est pas inversible.
En effet, pour n'importe quelle matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, le produit est nul et je ne peux pas obtenir l'identité :
$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad 0_n \times M = M \times 0_n = 0_n \neq I_n.$$

4. La matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ n'est pas la matrice nulle mais elle n'est pas inversible pour autant.
En effet, quelle que soit la matrice par laquelle je multiplie A à droite, la première ligne du résultat est constituée de trois zéros. Donc la matrice produit ne peut pas être égale à I_3.

Proposition 5.4

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de même taille.
Si $P \times Q = I_n$, alors P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = P.$$

En particulier, si $P \times Q = I_n$, alors $Q \times P = I_n$.

Exemple 5.5 – Calculer le produit PQ et vérifier que les matrices P et Q sont inversibles.

- On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$.

  Je calcule le produit $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 4 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} -5 & 7 \\ 3 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -20+21 & 28-28 \\ -15+15 & 21-20 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

  Comme $PQ = I_2$, alors P et Q sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

- On considère les matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix}$.

  Je calcule le produit $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{2}{3}+\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{1}{3}-\frac{2}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} \\ \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}-\frac{1}{3} & \frac{1}{3}+\frac{2}{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = I_3$$

  Comme $PQ = I_3$, alors P et Q sont inversibles et sont inverses l'une de l'autre.

Corollaire 5.6

Soient $P \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ deux matrices carrées de même taille et $\lambda \in \mathbb{R}^*$ un réel **non nul**.
Si $P \times Q = \lambda \times I_n$, alors P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = \frac{1}{\lambda} \times Q \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{\lambda} \times P.$$

Exemple 5.7 – Déterminer les inverses des matrices $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Je calcule le produit $P \times Q$:

$$P \times Q = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & -1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & -5 & -5 \\ -2 & -4 & 2 \\ 4 & 3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+12 & -5-4+9 & -5+2+3 \\ 4-4 & 5+8-3 & 5-4-1 \\ -4+4 & 5-8+3 & 5+4+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} = 10 \times I_3.$$

Comme $PQ = 10 \times I_3$, alors P et Q sont inversibles et

$$P^{-1} = \frac{1}{10} \times Q = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} & \frac{1}{5} \\ \frac{2}{5} & \frac{3}{10} & \frac{1}{10} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad Q^{-1} = \frac{1}{10} \times P = \begin{pmatrix} \frac{1}{10} & \frac{1}{10} & \frac{3}{10} \\ -\frac{1}{10} & -\frac{1}{5} & -\frac{1}{10} \\ -\frac{1}{10} & \frac{1}{5} & \frac{1}{10} \end{pmatrix}.$$

Méthode 5.8 – Vérifier qu'une matrice est inversible
En mathématiques, il est toujours plus facile de vérifier un résultat que de le montrer directement. C'est par exemple le cas pour montrer qu'une matrice est inversible.
Ainsi, si l'énoncé donne un candidat pour l'inverse, alors il suffit de multiplier, obtenir la matrice identité et l'inversibilité de la matrice est démontrée.
Il existe trois cas de figures simples où l'énoncé montre la voie :

1. **L'inverse est donnée directement.** Dans ce premier cas, on calcule le produit, on obtient la matrice identité et la Proposition 5.4 permet de conclure.
2. **On demande de calculer le produit de deux matrices.** Cette fois encore, on calcule le produit et deux cas de figure peuvent se présenter :
   - On obtient la matrice identité, possiblement à un facteur multiplicatif près : on conclut grâce au Corollaire 5.6 (sans oublier le facteur multiplicatif).
   - Le produit est nul : la matrice n'est pas inversible.
3. **On demande de vérifier une égalité matricielle impliquant des puissances de la matrice A.** On calcule l'expression demandée et le résultat doit permettre d'aboutir, après simplification, à une expression de la forme
$$A \times \left(\cdots\right) = I_n.$$
Alors la matrice A est inversible et l'inverse de A est donnée par le facteur entre parenthèses.

Exemple 5.9 – On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Montrer que $A^2 = A + 2I_3$.
En déduire que A est inversible et calculer son inverse.
Je calcule le produit A^2 :
$$A^2 = A \times A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Dans le même temps, je calcule aussi le terme de droite de l'égalité :
$$A + 2I_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$
Ainsi j'ai bien montré que $A^2 = A + 2I_3$.
Mon but est alors de me ramener à une expression de la forme $A \times \left(\cdots\right) = I_3$.
$$A^2 = A + 2I_3 \iff A^2 - A = 2I_3 \iff A \times \left(A - I_3\right) = 2I_3 \iff A \times \left(\frac{1}{2}\left(A - I_3\right)\right) = I_3$$
Finalement j'en déduis que la matrice A est bien inversible et son inverse est donnée par
$$A^{-1} = \frac{1}{2} \times \left(A - I_3\right).$$

Proposition 5.10 – Cas d'une matrice diagonale

Soit $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & d_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & d_n \end{pmatrix}$ une matrice diagonale.

La matrice diagonale D est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux d_i sont **tous** inversibles, *i.e.* **tous** non nuls. Dans ce cas, la matrice inverse est donnée par

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{d_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{1}{d_2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \dots & 0 & \frac{1}{d_n} \end{pmatrix}.$$

Exemple 5.11 – Donner l'inverse de la matrice $D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$.

Comme D est une matrice diagonale et que tous ses coefficients diagonaux sont non nuls alors elle est inversible et a pour inverse

$$D^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{-1} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

Proposition 5.12

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice triangulaire, supérieure ou inférieure.
La matrice A est inversible si et seulement si ses coefficients diagonaux sont **tous** non nuls.

Exemple 5.13 – Les matrices $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & -4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?

La matrice A est inversible car triangulaire avec tous ses coefficients diagonaux non nuls.
La matrice B n'est pas inversible car son deuxième coefficient diagonal est nul.

Proposition 5.14

Soient $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$, $B \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et $C \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ trois matrices carrées de même taille.

- Si A est inversible, alors A^{-1} est inversible et $\left(A^{-1}\right)^{-1} = A$.
- Si A et B sont inversibles, alors le produit AB est inversible et $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
- Si A est inversible, alors A est **simplifiable** à gauche et à droite, c'est-à-dire que

$$AB = AC \implies B = C \qquad \text{et} \qquad BA = CA \implies B = C.$$

Proposition 5.15 – Cas d'une matrice de taille 2

Soit $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice carrée de taille 2. On appelle **déterminant** de la matrice A le réel :

$$\det(A) = ad - bc.$$

La matrice A est inversible si et seulement si son déterminant est non nul : $\det(A) = ad - bc \neq 0$.
Dans ce cas, la matrice inverse de A est donnée par

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Démonstration. On commence par observer que

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & -ab+ab \\ cd-cd & -bc+ad \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad-bc & 0 \\ 0 & ad-bc \end{pmatrix} = \det(A) \times I_2.$$

Donc si $\det(A) = ad - bc \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \times \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

En revanche, si $\det(A) = 0$, alors en posant $B = \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$, on obtient que $AB = 0_2$.
En raisonnant par l'absurde et supposant que A est inversible, alors on obtient que $B = A^{-1}AB = A^{-1}0_2 = 0_2$, ce qui donne $a = b = c = d = 0$ et donc $A = 0_2$. Or la matrice nulle de taille 2 n'est pas inversible.
D'où contradiction. Donc A n'est pas inversible. □

Exemple 5.16 – Les matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 6 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sont-elles inversibles ?
Si oui, préciser leur inverse.

- Je calcule le déterminant de la matrice A :

$$\det(A) = 1 \times 4 - 2 \times 3 = 4 - 6 = -2.$$

  Comme $\det(A) \neq 0$, alors A est inversible et

$$A^{-1} = \frac{1}{-2} \times \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ \frac{3}{2} & -\frac{1}{2} \end{pmatrix}.$$

- Je calcule le déterminant de la matrice B :

$$\det(B) = 3 \times 4 - 6 \times 2 = 12 - 12 = 0.$$

  Comme $\det(B) = 0$, alors B n'est pas inversible.

II – Calcul effectif de l'inverse d'une matrice

1 – Calcul de l'inverse par la résolution d'un système

Théorème 5.17

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si et seulement si pour toute matrice colonne $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, le système linéaire $AX = Y$ d'inconnue $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ admet une unique solution.

Méthode 5.18 – Montrer qu'une matrice est inversible et calculer son inverse

On fixe deux matrices colonnes $X \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ et $Y \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$ puis on résout le système $AX = Y$ avec les outils mis en place en première année. Alors on peut savoir si une matrice est inversible et le cas échéant, calculer son inverse :

- Si le système admet une unique solution X, c'est-à-dire que X s'écrit de façon unique en fonction de Y, comme $X = BY$, alors A est inversible et $A^{-1} = B$.
- Sinon la matrice n'est pas inversible.

Exemple 5.19 – Montrer que la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

Je fixe les deux matrices colonnes $X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$ et $Y = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{3,1}(\mathbb{R})$,

où x, y et z sont les inconnues et a, b et c les paramètres du système. Alors je peux écrire

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} 1 & -7 & 11 \\ -1 & 12 & -19 \\ 0 & -3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \iff \left\{ \begin{array}{rcrcrcl} x & - & 7y & + & 11z & = & a \\ -x & + & 12y & - & 19z & = & b \\ & & -3y & + & 5z & = & c \end{array} \right.$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 7y + 11z = a \\ 5y - 8z = a + b \\ -3y + 5z = c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + L_1$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 7y + 11z = a \\ 15y - 24z = 3a + 3b \\ -15y + 25z = 5c \end{array} \right. \qquad \begin{array}{l} L_2 \leftarrow 3L_2 \\ L_3 \leftarrow 5L_3 \end{array}$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 7y + 11z = a \\ 15y - 24z = 3a + 3b \\ z = 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \qquad L_3 \leftarrow L_3 + L_2$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 7y + 11z = a \\ 15y = 75a + 75b + 120c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow L_2 + 24L_3$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x - 7y + 11z = a \\ y = 5a + 5b + 8c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \qquad L_2 \leftarrow \frac{1}{15}L_2$$

$$\iff \left\{ \begin{array}{l} x = 3a + 2b + c \\ y = 5a + 5b + 8c \\ z = 3a + 3b + 5c \end{array} \right. \qquad L_1 \leftarrow L_1 + 7L_2 - 11L_3$$

Finalement,

$$AX = Y \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}.$$

Le système admet ainsi une solution unique.
Finalement la matrice A est inversible et son inverse est donnée par $A^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 5 & 5 & 8 \\ 3 & 3 & 5 \end{pmatrix}$.

2 – Calcul de l'inverse par la méthode du pivot de Gauss

Théorème 5.20

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice carrée. La matrice A est inversible si et seulement si une suite d'opérations élémentaires sur les lignes de A transforme la matrice A en une matrice B inversible.
Dès lors, en transformant la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations sur les lignes et en effectuant simultanément les mêmes opérations sur la matrice identité, alors on obtient l'inverse de la matrice A.

Méthode 5.21 – Méthode du Pivot de Gauss

En pratique, la méthode précédente revient à transformer la matrice A en la matrice identité à l'aide d'opérations élémentaires. L'utilisation d'un système linéaire n'est pas requise.

1. On commence par transformer la matrice A en une matrice triangulaire supérieure par la méthode du pivot de Gauss, ce qui permet de savoir si A est inversible ou non.
2. Le cas échéant, on transforme alors la matrice triangulaire en une matrice diagonale puis en la matrice identité.

Alors en effectuant exactement les mêmes opérations, dans le même ordre, à la matrice identité I_n, on obtient, sous réserve d'existence, la matrice inverse A^{-1}.

Exemple 5.22 – Montrer que la matrice $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ est inversible et déterminer son inverse.

J'applique la méthode du pivot de Gauss pour transformer P en la matrice identité I_3, tout en effectuant les mêmes opérations sur la matrice identité I_3 pour déterminer P^{-1}.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_1} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{L_3 \leftarrow L_3 + L_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est triangulaire supérieure, avec tous ses pivots non nuls donc elle est inversible.
Dès lors, j'en déduis que la matrice P est inversible. Je poursuis la méthode.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{L_1 \leftarrow L_1 - L_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Bigg| \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalement j'ai bien obtenu la matrice identité à gauche. Donc la matrice à droite n'est autre que la matrice inverse de P. La matrice P est bien inversible et

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$