EXERCICES — CHAPITRE 4

Tous les résultats numériques seront donnés à 0.01 près.

Exercice 1 $(\star)$ – Le nombre de pannes journalières d'une machine est une variable aléatoire X dont la loi de probabilité est donnée par le tableau suivant.

x	0	1	2	3	4	5	6
$P(X=x)$	0.4	0.25	0.15	0.1	0.05	0.035	0.015

1. Quelle est la fonction de répartition de X ? En donner une représentation graphique.
2. Quelle est la probabilité que la machine ait strictement plus de trois pannes ?
3. Trouver x_0 tel que $P(X \leqslant x_0) = 0.8$ et x_1 tel que $P(X \geqslant x_1) = 0.35$.
4. Calculer $E(X)$.

Exercice 2 $(\star\star)$ – Une urne contient sept boules rouges et cinq boules noires. Les boules sont indiscernables au toucher. On prend au hasard et simultanément trois boules de l'urne. On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de boules rouges obtenues lors du tirage.

1. Déterminer le support de X.
2. Donner la loi de probabilité de X.
3. Calculer l'espérance et l'écart-type de X.

Exercice 3 $(\star\star\star)$ – Une urne contient à son état initial une boule rouge et une boule noire. On effectue des tirages d'une boule avec remise jusqu'à l'obtention d'une boule noire, en rajoutant à chaque tirage une boule rouge supplémentaire. On note X la variable aléatoire correspondant au numéro du tirage final où apparaît une boule noire.

1. Déterminer $X(\Omega)$.
2. Déterminer la loi de X.
3. Montrer que
$$\sum_{k=1}^{+\infty} P(X=k) = 1.$$

Exercice 4 $(\star\star\star)$ – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définit bien une loi de probabilité.
2. Soit X une variable aléatoire de support $\mathbb{N}^*$, dont la loi est donnée par
$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=n) = u_n.$$
X admet-elle une espérance ? Si oui, la calculer.

Exercice 5 $(\star\star\star)$ – Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que
$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad P(X=k) = a3^{-k}.$$

1. Déterminer a pour que l'on définisse bien une loi de probabilité.
2. X a-t-elle plus de chance de prendre des valeurs paires ou impaires ?

Exercice 6 $(\star)$ –

1. On considère un jeu pour lequel la mise de départ est de 1 euro. On tire deux boules au hasard, sans remise, dans une urne contenant cinq boules numérotées de 1 à 5.
Si la somme des deux nombres est paire, alors on gagne 2 euros. Si on tire un 1 et un 2, alors on gagne 4 euros. Sinon on ne gagne rien. On note X le gain algébrique.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.
2. On lance une pièce de monnaie non truquée jusqu'à obtenir pour la première fois PILE. La variable aléatoire X est égale au nombre de lancers effectués.
   a) Déterminer la loi de X.
   b) Justifier que X admet une espérance et calculer $E(X)$.

Exercice 7 $(\star)$ – Un cavalier effectue une série de balades à cheval.
À chaque balade qu'il effectue, la probabilité que le cavalier soit désarçonné est égale à $\dfrac{1}{10}$.

1. Quelle est la probabilité qu'il ait fait deux chutes au terme de douze balades ?
Indication numérique : $0.9^{10} \approx 0.35$
2. Sachant que trois chutes entraînent obligatoirement une blessure grave, quelle est la probabilité qu'il ne soit pas blessé après ces douze balades ?
Indication numérique : $0.9^{11} \approx 0.31$ *et* $0.9^{12} \approx 0.28$

Exercice 8 $(\star)$ – On considère une pièce dont la probabilité d'obtenir PILE est égale à 0.3.

1. On lance la pièce dix fois. Quelle est la probabilité d'obtenir trois PILE ?
Indication numérique : $0.3^3 \approx 0.03$ *et* $0.7^7 \approx 0.08$
2. On lance la pièce jusqu'à obtenir PILE. Combien en moyenne effectuera-t-on de lancers ?

Exercice 9 $(\star\star)$ – Sur le marché du travail de l'agglomération rouennaise, le nombre moyen de changements d'emploi d'un ouvrier dans une période de cinq ans est de deux.
Sachant que ce nombre suit une loi de Poisson, calculer les probabilités suivantes :

1. la probabilité qu'un travailleur ne fasse aucun changement pendant cinq ans,
Indication numérique : $e^{-2} \approx 0.14$
2. la probabilité qu'un travailleur fasse au moins un changement,
3. la probabilité qu'il fasse plus d'un changement, mais moins de cinq *(1 et 5 inclus)*.

Exercice 10 (⋆⋆⋆⋆) – [Oral HEC voie T 2019]
Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ telle que pour tout entier n non nul,

$$P(X>n)\neq 0.$$

On dit que X vérifie la propriété d'absence de mémoire lorsque

$$\forall n\geqslant 1,\quad \forall m\geqslant 1,\quad P_{[X>n]}(X>n+m)=P(X>m).$$

1. a) **Question de cours :** Donner la définition d'une suite géométrique.
   b) Quelles sont les suites géométriques admettant une limite finie ?
2. Soit T une variable aléatoire qui suit la loi géométrique de paramètre $p\in\left]0,1\right[$.
   Établir que T vérifie la propriété d'absence de mémoire.
3. Soit S une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ vérifiant la propriété d'absence de mémoire. On pose pour tout entier $n\geqslant 1,\quad u_n=P(S>n)$.
   a) Établir que $\forall n\geqslant 1,\quad \forall m\geqslant 1,\quad u_{n+m}=u_nu_m$.
   b) En déduire que la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ est géométrique.
   c) Exprimer $P(S=n)$ en fonction de certains termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$.
   d) En déduire que la variable aléatoire S suit une loi géométrique dont on précisera le paramètre.
4. Quel résultat a-t-on démontré ?

Exercice 11 (⋆⋆⋆⋆) – [Oral HEC voie T 2021]
Une urne contient une boule blanche et deux boules noires. On effectue une succession de tirages avec remise dans cette urne, jusqu'à ce que l'on ait obtenu au moins une fois une boule blanche et une boule noire. On note X le nombre de tirages nécessaires pour obtenir une boule blanche. On note T la variable aléatoire désignant le nombre de tirages effectués. (On rappelle que les tirages s'arrêtent dès que l'on a obtenu une boule blanche et une boule noire.)
On notera aussi pour $j\in\mathbb{N}^*$, N_j l'événement : « le j-ième tirage donne une boule noire ».

1. **Question de cours :** Loi géométrique de paramètre $p\in\left]0,1\right[$: protocole, loi, espérance et variance.
2. Déterminer la loi de X, son espérance et sa variance.
3. a) Déterminer $T(\Omega)$ et calculer $P(T=2)$.
   b) À l'aide du système complet $\left[N_1,\overline{N_1}\right]$, calculer $P(T=k)$ pour $k\in T(\Omega)$.
4. La variable e^X admet-elle une espérance ?

On note U la variable aléatoire prenant pour valeur le nombre de boules blanches au moment où l'on s'arrête. Par exemple, si les tirages ont donné successivement : une boule noire, une boule noire, une boule noire et une boule blanche, alors $T=4$ et $U=1$.

5. a) Déterminer $U(\Omega)$.
   b) Calculer $P(U=1)$. Les variables aléatoires U et T sont-elles indépendantes ?

Exercice 12 (⋆⋆⋆) – [BSB 2012 / Ex3]
Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\dfrac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : « l'élève A connaît la réponse à la première question »,
- J : « l'élève A répond juste à la première question ».

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J)=\dfrac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(X=k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$ l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   a) Justifier l'égalité $N=3X-40$.
   b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?