3 | Séries numériques

I – Convergence

1 – Définitions

Définition 3.1 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On appelle **série de terme général** u_n la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k.$$

La série de terme général u_n est notée $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ou parfois simplement $\sum u_n$.

Le réel $S_n = \sum\limits_{k=0}^{n} u_k$ est appelé **somme partielle d'indice** n de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$.

Remarque 3.2 – Si la suite $(u_n)_{n\geqslant n_0}$ n'est définie qu'à partir d'un certain rang n_0, la série de terme général u_n n'est également définie qu'à partir de n_0, ce que l'on note $\sum\limits_{n\geqslant n_0} u_n$.

La suite des **sommes partielles** est alors notée $(S_n)_{n\geqslant n_0}$, avec $S_n = \sum\limits_{k=n_0}^{n} u_k$.

Exemple 3.3 –

1. On considère la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} n$. Son **terme général** est donné par $u_n = n$.
   Les premières **sommes partielles** sont données par

   $$S_0 = 0, \quad S_1 = 0+1 = 1, \quad S_2 = 0+1+2 = 3, \quad S_3 = 0+1+2+3 = 6, \quad \text{etc.}$$

   De manière générale, je peux montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}.$$

2. La série $\sum\limits_{n\geqslant 1} \frac{1}{n}$ est appelée la **série harmonique**. Son terme général est donné par $u_n = \frac{1}{n}$.
   Les premières sommes partielles sont données par

   $$S_1 = 1, \quad S_2 = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}, \quad S_3 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} = \frac{11}{6}, \quad S_4 = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} = \frac{25}{12}, \quad \text{etc.}$$

   Il n'existe pas de formule simple pour exprimer la somme partielle S_n d'indice n.

2 – Séries convergentes

La série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est en réalité une suite. On peut donc s'intéresser à sa convergence.

Définition 3.4 – Soient $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ une série numérique et S_n sa somme partielle d'indice n.

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **convergente**.

  La limite S de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est alors appelée **somme de la série** $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et on note

$$S = \lim_{n\to+\infty} S_n = \lim_{n\to+\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k.$$

- Si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, on dit que la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ est **divergente**.
- Déterminer la **nature** d'une série consiste à déterminer si celle-ci est convergente ou divergente.

Remarque 3.5 –

- L'écriture $\sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ n'a de sens que si la série **converge**! Alors que l'écriture $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ a toujours un sens, puisque celle-ci désigne une suite.
- Tout comme on ne confond pas la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$, le terme u_n d'indice n de cette suite et sa limite éventuelle ℓ, il convient de ne pas confondre la série $\sum_{n\geqslant 0} u_n$, la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ d'indice n et la somme éventuelle $S = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k$ de la série.
- Les sommes infinies ne se manipulent pas comme les sommes finies (puisqu'en réalité ce sont des limites, il faut donc toujours s'assurer de la convergence). C'est pourquoi on calcule *(presque)* toujours les sommes partielles, qui sont des sommes finies, avant de passer à la limite.

Exemple 3.6 –

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 0$. Alors la somme partielle d'indice n est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 0 = 0.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc clairement convergente et sa limite vaut 0.

  Donc la série $\sum_{n\geqslant 0} 0$ **converge** et $\sum_{k=0}^{+\infty} 0 = 0$.

- Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $u_n = 1$. Alors la somme partielle d'indice n est donnée par

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1.$$

  La suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} 1$ **diverge**.

3 – Premiers exemples

1. On considère la série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$. Son terme général est donné par $u_n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

   La **somme partielle d'indice** n est

$$S_n=\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{2}}=2\times\left(1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right)=2-2\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n.$$

   La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad S_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^n=2-\frac{1}{2^n}.$$

   Or $\frac{1}{2}\in\,]-1,1[$ donc $\lim_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n=0$ et $\lim_{n\to+\infty}S_n=2$.
   La série $\sum_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est donc **convergente** et $\sum_{k=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^k=2$.

2. On considère la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$.

   Son terme général est donné par $u_n=\frac{1}{n(n+1)}$. Pour la somme partielle d'indice n, je commence par remarquer que $\frac{1}{k(k+1)}=\frac{(k+1)-k}{k(k+1)}=\frac{(k+1)}{k(k+1)}-\frac{k}{k(k+1)}=\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}$. Alors par télescopage,

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\cancel{\frac{1}{2}}+\cancel{\frac{1}{2}}-\cancel{\frac{1}{3}}+\cancel{\frac{1}{3}}-\cancel{\frac{1}{4}}+\cdots+\cancel{\frac{1}{n}}-\frac{1}{n-1}=1-\frac{1}{n+1}.$$

   La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc la suite $(S_n)_{n\geqslant 1}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=1-\frac{1}{n+1}.$$

   Or $\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n+1}=0$ donc $\lim_{n\to+\infty}S_n=1$.
   La série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(n+1)}$ est donc convergente et $\sum_{k=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{k(k+1)}\right)=1$.

3. La série harmonique $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n}$ diverge.

   Il s'agit d'une preuve élégante publiée par Nicole Oresme en 1360. L'idée est de minorer la série harmonique par une série qui diverge vers $+\infty$, en remplaçant tous les termes $\frac{1}{n}$ de la somme par la puissance de $\frac{1}{2}$ qui lui est immédiatement inférieure. Alors

$$\begin{aligned}\lim_{n\to+\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}&=1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}+\frac{1}{9}+\cdots\\&\geqslant 1+\frac{1}{2}+\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}+\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}}+\frac{1}{16}+\cdots\geqslant 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\cdots\end{aligned}$$

   En effet il y a 2 termes égaux à $\frac{1}{4}$, qui additionnés donnent $\frac{1}{2}$, $4\times\frac{1}{8}=\frac{1}{2}$, $8\times\frac{1}{16}=\frac{1}{2}$, et ainsi de suite.
   En ajoutant une infinité de fois le terme $\frac{1}{2}$, la divergence de la somme est évidente.
   Et puisque la série harmonique est plus grande, alors elle diverge.

II – Sommes de séries

1 – Opérations sur les séries

Les opérations sur les sommes finies se transposent, sous certaines conditions, aux séries.

Théorème 3.7

Soient $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles et λ un réel non nul.

- Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} \lambda u_n$ sont de même nature (c'est-à-dire qu'elles sont ou bien toutes les deux convergentes, ou bien toutes les deux divergentes). Si elles sont convergentes, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda \times u_k) = \lambda \times \left(\sum_{k=0}^{+\infty} u_k\right).$$

- Si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ sont toutes les deux convergentes, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ est également convergente et

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_k + v_k) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k + \sum_{k=0}^{+\infty} v_k.$$

ATTENTION ! La réciproque du second point n'est pas vraie! La convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ n'assure pas **du tout** la convergence des séries $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$.

Exemple 3.8 – Si l'on pose pour tout $n \geqslant 1$, $u_n = \dfrac{1}{n}$ et $v_n = -\dfrac{1}{n}$, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_n + v_n)$ converge alors que ni $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ni $\sum\limits_{n\geqslant 0} v_n$ ne convergent (voir les exemples précédents).

2 – Suites et séries

Théorème 3.9

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge si et seulement si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (u_{n+1} - u_n)$ converge. Dès lors, si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge, en notant ℓ sa limite, alors

$$\sum_{k=0}^{+\infty} (u_{k+1} - u_k) = \ell - u_0.$$

Théorème 3.10 – Condition nécessaire de convergence

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ converge, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$.

ATTENTION ! On peut très bien avoir $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$ sans que $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ ne converge!

Par exemple, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$ et la série harmonique $\sum\limits_{n\geqslant 1} \dfrac{1}{n}$ diverge.

Corollaire 3.11

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. Si la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne converge pas vers 0, alors la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ diverge.

Exemple 3.12 – Les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}(-1)^n$, $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{n^2}{n+1}$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\dfrac{3^n}{2^n-3^n}$ sont divergentes.

3 – Séries géométriques

Définition 3.13 – Pour tout réel q, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ s'appelle la **série géométrique** de raison q.

On a montré précédemment que la série géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ converge et que sa somme vaut 2. Plus généralement, on a le résultat suivant :

Théorème 3.14

Soit $q\in\mathbb{R}$ un réel. La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} q^n$ est convergente si et seulement si $|q|<1$, *i.e.* $q\in\,]-1,1[$.

Dans ce cas,

$$\sum_{k=0}^{+\infty} q^k = \frac{1}{1-q}.$$

Exemple 3.15 – Déterminer si les séries $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ et $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ convergent et le cas échéant, donner la somme de la série.

- Pour $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$, il s'agit d'une série géométrique de raison $q=\dfrac{5}{4}$. Or $\dfrac{5}{4}>1$ donc $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n=+\infty$ et comme le terme général diverge, alors nécessairement, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{5}{4}\right)^n$ est divergente.
- Pour $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$, il s'agit d'une série géométrique de raison $q=\dfrac{4}{5}$. Or $\left|\dfrac{4}{5}\right|<1$ donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n$ est convergente sa somme est donnée par $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\dfrac{4}{5}\right)^n=\dfrac{1}{1-\frac{4}{5}}=\dfrac{1}{\frac{1}{5}}=5.$

Méthode 3.16 – Étudier la nature d'une série $\sum\limits_{n\geqslant 0} u_n$ et/ou calculer sa somme éventuelle

1. On regarde si le terme général tend vers 0 :
   - Si la réponse est **non**, la série est **divergente**.
   - Si la réponse est oui, on ne peut pas conclure, il faut poursuivre l'étude.
2. On essaie d'exprimer la série à l'aide d'une série géométrique.
3. Si ce n'est pas possible, on poursuit l'étude en écrivant la somme partielle $S_n=\sum\limits_{k=0}^{n} u_k$.

   On regarde si on peut simplifier S_n, en utilisant un changement d'indice, une mise en facteur ou un "télescopage des termes". Puis on conclut à l'aide des résultats de convergence des suites.