**NOM :**

# INTERRO DE COURS – SEMAINE 16

**Exercice 1 –** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_{n+1} = \dfrac{1}{4}u_n + \dfrac{3}{4}$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\quad u_n \leqslant 1$.

**Solution :** Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\quad u_n \leqslant 1$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$, $\quad u_0 = \dfrac{1}{2} \quad$ et $\quad \dfrac{1}{2} \leqslant 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
Par hypothèse de récurrence $\quad u_n \leqslant 1$, $\quad$ donc

$$u_{n+1} = \frac{1}{4}u_n + \frac{3}{4} \leqslant \frac{1}{4} \times 1 + \frac{3}{4} = \frac{1+3}{4} = 1.$$

Donc $u_{n+1} \leqslant 1$. Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \leqslant 1.$$

**Exercice 2 –** Démontrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$\sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right) = \left(n+1\right)^2.$$

**Solution :** Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

**Énoncé :** Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right) = \left(n+1\right)^2$.

**Initialisation :** Pour $n = 0$,

$$\sum_{k=0}^{0} \left(2k+1\right) = \left(2 \times 0 + 1\right) = 1 \quad \text{et} \quad (0+1)^2 = 1^2 = 1.$$

Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

**Hérédité :** Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right) = (n+1)^2$. Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n+1} \left(2k+1\right) &= \left(\sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right)\right) + \left(2 \times (n+1) + 1\right) = \left(n+1\right)^2 + 2n + 3 \\ &= n^2 + 2n + 1 + 2n + 3 = n^2 + 4n + 4 = \left(n+2\right)^2.\end{aligned}$$

Donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{n+1} \left(2k+1\right) = \left(n+1+1\right)^2$.

Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

**Conclusion :** Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \sum_{k=0}^{n} \left(2k+1\right) = \left(n+1\right)^2.$$