CONCOURS BLANC 2

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 4 exercices. Bon courage!

Exercice 1 –

1. Justifier que pour tout réel x, on a $x^2+x+1>0$.

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x)=\ln\left(x^2+x+1\right)$.
On note $\mathcal{C}$ sa courbe dans un repère orthonormé $\left(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\right)$.

2. Rappeler la valeur de $\lim\limits_{x\to+\infty}\ln(x)$. Calculer $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ et $\lim\limits_{x\to-\infty}f(x)$.
3. Vérifier que $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\ln(3)-2\ln(2)$.
4. a) Justifier que pour tout réel x, on a $f'(x)=\dfrac{2x+1}{x^2+x+1}$.
   b) Dresser le tableau des variations de f sur $\mathbb{R}$ en y faisant figurer les éléments obtenus aux questions **2.** et **3.**.
5. a) Montrer, en la résolvant, que l'équation $f(x)=0$ d'inconnue x admet exactement deux solutions : -1 et 0.
   b) Justifier que la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse 0 a pour équation $y=x$.
   Déterminer une équation de la tangente à $\mathcal{C}$ au point d'abscisse -1.
6. On donne $f\left(-\dfrac{1}{2}\right)\approx-0.3$.
   Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ ainsi que les tangentes obtenues en **5.b)**.

Exercice 2 –

Partie I – Tirages dans une urne

Une urne $\mathcal{U}$ contient 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher.

1. On procède à 400 tirages successifs avec remise d'une boule dans $\mathcal{U}$.
   On appelle X la variable aléatoire égale au nombre de fois où la boule noire a été piochée.
   a) Quelle est la loi de X ? On précisera $X(\Omega)$ et $P(X = k)$ pour tout $k \in X(\Omega)$.
   b) Donner la valeur de l'espérance de X, notée $E(X)$, et vérifier que la variance de X, notée $V(X)$, est égale à 75.
2. Cette fois-ci, on pioche dans l'urne $\mathcal{U}$ successivement et sans remise les quatre boules.
   On note Z le numéro du tirage auquel est apparue la boule noire.
   a) Quelle est la loi de Z ? On précisera $Z(\Omega)$ et $P(Z = k)$ pour tout $k \in Z(\Omega)$.
   b) Donner les valeurs de $E(Z)$ et de $V(Z)$.

Partie II – Tirages dans une urne choisie au hasard

L'urne $\mathcal{U}$ contient toujours 1 boule noire et 3 boules blanches indiscernables au toucher. L'urne $\mathcal{V}$ contient 2 boules noires et 2 boules blanches indiscernables au toucher. On lance une pièce équilibrée. Si elle retombe sur le côté PILE, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{U}$, et si on obtient FACE, on tire deux boules successivement et avec remise dans $\mathcal{V}$.
On note T la variable aléatoire égale au nombre de fois où l'on a pioché une boule noire.

1. Que vaut $T(\Omega)$?
2. Donner la loi de T. On vérifiera que $P(T = 1) = \dfrac{7}{16}$.
3. Calculer $E(T)$. La variable aléatoire T suit-elle une loi binomiale ?
4. Sachant que l'événement $[T = 1]$ est réalisé, est-il plus probable d'avoir obtenu PILE ou d'avoir obtenu FACE avec la pièce ?

Exercice 3 – On considère la fonction polynôme P, de degré 3, donnée pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$P(x) = x^3 - x^2 - x + 1.$$

1. Montrer que P s'annule pour $x = -1$.
2. Déterminer trois réels a, b et c tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\quad P(x) = (x+1)\left(ax^2 + bx + c\right)$.
3. En déduire que P admet deux racines et les déterminer.
4. Calculer, en les justifiant, les limites de $P(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
5. Étudier les variations de P sur $\mathbb{R}$ puis dresser son tableau de variations en faisant figurer les limites calculées à la question **4.**.
6. Calculer l'intégrale
$$I = \int_{-1}^{1} P(x)\,\mathrm{d}x.$$
7. Dans un repère orthonormé d'unité 3 cm, tracer la représentation graphique de P en faisant figurer les tangentes horizontales et en hachurant la surface correspondant au calcul de I. Pour cela, on donne $P\left(-\dfrac{1}{3}\right) \approx 1.19$.

On considère la fonction f définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

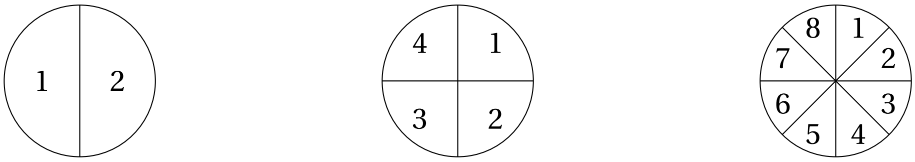
$$f(x) = \left(x^2 - 2x - 1\right)\mathrm{e}^x.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

8. Calculer l'image de 0 par f.
9. Calculer, en les justifiant, les limites de $f(x)$ lorsque x tend vers $+\infty$ et $-\infty$.
10. Calculer la dérivée f' de f et montrer qu'elle s'annule en $-\sqrt{3}$ et $\sqrt{3}$.
11. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$ et dresser son tableau de variations en faisant figurer les limites calculées à la question **9.** et l'image de 0 obtenue à la question **8.**.
12. Déterminer le signe de $f\left(-\sqrt{3}\right)$ et celui de $f\left(\sqrt{3}\right)$.
13. Donner l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -1 et montrer qu'elle passe par $O = (0,0)$, l'origine du repère.
14. Dans cette question, on cherche à déterminer le nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.
    a) Montrer que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si
    $$f(x_0) - x_0 f'(x_0) = 0.$$
    b) En déduire que la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse x_0 passe par l'origine si et seulement si
    $$P(x_0) = 0,$$
    où P est la fonction polynôme étudiée au début de l'exercice.
    c) Conclure quant au nombre de tangentes à $\mathcal{C}_f$ passant par l'origine du repère.

Exercice 4 –

Un forain organise un jeu de fléchettes dans une fête foraine. Le jeu se présente sous la forme de trois cibles A, B et C. La cible A est séparée en deux secteurs, la cible B est séparée en quatre secteurs et la cible C est séparée en 8 secteurs. Sur chaque cible, les secteurs sont de même dimension ce qui signifie qu'un joueur qui lance une fléchette au hasard sur une cible donnée a les mêmes chances d'atteindre chaque secteur de cette cible.



A **B** **C**

Le jeu consiste à lancer des fléchettes sur les cibles successives selon le protocole suivant :

- On commence par la cible A. Il faut atteindre le secteur 1 de cette cible pour avoir le droit de passer à la cible B ; dans le cas contraire on continue à lancer la fléchette en direction de la cible A.
- De même, lorsqu'on lance une fléchette en direction de la cible B, il faut atteindre le secteur 1 pour avoir le droit de passer à la cible C ; dans le cas contraire, on continue les lancers vers la cible B.
- Enfin le joueur ne lance qu'une fois la fléchette en direction de la cible C. Le secteur qu'il atteint décide du lot qu'il gagne.

On suppose que le joueur atteint toujours la cible visée et que pour une cible donnée les secteurs atteints le sont de manière équiprobable. On suppose que le joueur continue de lancer des fléchettes autant de fois qu'il est nécessaire pour avoir le droit de passer à la cible C.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On note A_n l'événement "lors du lancer de la n-ème fléchette le joueur tire vers la cible A". On définit de même l'événement B_n. On note enfin a_n et b_n les probabilités respectives de A_n et B_n.

Le joueur commençant par la cible A, on a donc $a_1 = 1$ et $b_1 = 0$.

1. a) Calculer les probabilités a_2 et b_2.

   b) Calculer b_3 et vérifier que $b_3 = \dfrac{5}{8}$.

2. En utilisant la formule des probabilités totales, justifier que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a
$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n \quad \text{et} \quad b_{n+1} = \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}a_n.$$

3. a) Recopier et compléter la fonction suivante afin qu'elle calcule et affiche les valeurs de a_n et de b_n.

```
1.  def calcul(n) :
2.      a=1
3.      b=0
4.      for k in range(1,n) :
5.          b=...
6.          a=...
7.      return a,b
```

   b) Si on échange les lignes 5. et 6. le résultat affiché est-il le même ? Pourquoi ?

4. Montrer que pour tout entier $n \geqslant 1$, on a $a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$.

5. Pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on pose $v_n = 2^{n-1} b_n + 2$.

   a) Montrer que $v_1 = 2$ et que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $v_{n+1} = \frac{3}{2} v_n$.

   b) En déduire une expression de v_n en fonction de n pour tout entier naturel $n \geqslant 1$.

   c) Établir que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, on a $b_n = 2 \times \frac{3^{n-1}}{4^{n-1}} - \frac{2}{2^{n-1}}$.

6. On suppose avoir importé la librairie `numpy.random` sous l'abréviation `rd` et on rappelle que l'instruction `rd.randint(n1,n2+1)` renvoie un entier au hasard et uniformément compris entre `n1` et `n2`. Soit X la variable aléatoire égale au nombre de fléchettes lancées par le joueur. Recopier le programme suivant et compléter les lignes 11., 12. et 13. afin qu'il simule notre expérience et affiche la valeur de X.

```
1.  import numpy.random as rd
2.  cible='a'
3.  n=0
4.  while cible!='c' :
5.      n=n+1
6.      if cible=='a' :
7.          secteur=rd.randint(1,3)
8.          if secteur==1 :
9.              cible='b'
10.     else :
11.         secteur=...
12.         if ... :
13.             ...
14. print(n)
```

7. Il faut payer 1 euro pour chaque fléchette lancée. Les joueurs se découragent vite. Le forain constate qu'en fait, chaque joueur effectue au moins deux lancers et s'il n'obtient pas le droit de tirer sur la cible C après les deux premiers lancers, alors il abandonne le jeu. Les deux euros qu'il a donnés sont alors perdus.

   a) Justifier que la probabilité pour un joueur donné de gagner un lot dans ces conditions est $\frac{1}{8}$.

   20 joueurs se présentent successivement et jouent selon ce principe. On suppose que les résultats de chaque joueur sont indépendants les uns des autres. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de joueurs qui gagnent un lot.

   b) Reconnaître la loi de Y. Décrire l'ensemble $Y(\Omega)$ des valeurs prises par Y et donner l'expression de $P(Y = k)$ pour tout entier k appartenant à cet ensemble.

   c) Calculer $E(Y)$ et $V(Y)$.

   d) Chaque lot offert par le forain est d'une valeur de 5 euros. Une fois que les 20 joueurs ont tenté leur chance, on note G la variable aléatoire égale au gain en euros du forain, G étant négatif si le forain perd de l'argent.
   Justifier que $G = 2\big(20 - Y\big) - 2Y$. Calculer le gain moyen du forain.