DEVOIR SURVEILLÉ 4

Exercice 1 –

1. Il s'agit de l'intégrale d'une fonction polynomiale, dont je peux déterminer une primitive terme à terme. Alors

$$\begin{aligned}\int_0^1 \left(2x^2-5x+3\right)\mathrm{d}x &= \left[2\times\frac{x^3}{3}-5\times\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^1 = \left[\frac{2}{3}x^3-\frac{5}{2}x^2+3x\right]_0^1\\ &= \frac{2}{3}\times 1^3-\frac{5}{2}\times 1^2+3\times 1-\left(\frac{2}{3}\times 0^3-\frac{5}{2}\times 0^2+3\times 0\right)\\ &= \frac{2}{3}-\frac{5}{2}+3=\frac{4}{6}-\frac{15}{6}+\frac{18}{6}=\frac{7}{6}.\end{aligned}$$

2. Je cherche une primitive de la fonction $f(x)=\dfrac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}$:

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{u^2}$, avec $u(x)=1+x^4$. Puisque $u'(x)=4x^3$, alors

$$\frac{u'(x)}{u(x)^2}=\frac{4x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=4\times\frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}=4f(x).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(x)=\frac{1}{4}\times\left(-\frac{1}{u(x)}\right)=-\frac{1}{4}\times\frac{1}{1+x^4}=-\frac{1}{4+4x^4}.$$

   Ainsi

$$\int_0^1 \frac{x^3}{\left(1+x^4\right)^2}\mathrm{d}x=\left[-\frac{1}{4+4x^4}\right]_0^1=-\frac{1}{4+4\times 1^4}-\left(-\frac{1}{4+4\times 0^4}\right)=-\frac{1}{8}+\frac{1}{4}=\frac{1}{8}.$$

3. Je cherche une primitive de la fonction $f(t)=\dfrac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}$:

   f semble être de la forme $\dfrac{u'}{\sqrt{u}}$, avec $u(t)=t^4+1$. Puisque $u'(t)=4t^3$, alors

$$\frac{u'(t)}{\sqrt{u(t)}}=\frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}=f(t).$$

   Donc une primitive de f est donnée par

$$F(t)=2\sqrt{u(t)}=2\sqrt{t^4+1}.$$

   Ainsi

$$\int_{-1}^1 \frac{4t^3}{\sqrt{t^4+1}}\mathrm{d}t=\left[2\sqrt{t^4+1}\right]_{-1}^1=2\sqrt{1^4+1}-2\sqrt{(-1)^4+1}=2\sqrt{2}-2\sqrt{2}=0.$$

4. Il s'agit de l'intégrale d'une somme, dont je peux déterminer une primitive terme à terme. Alors

$$\begin{aligned}\int_1^4\left(\frac{1}{\sqrt{x}}+x-2\right)\mathrm{d}x &= \left[2\sqrt{x}+\frac{x^2}{2}-2x\right]_1^4=\left(2\sqrt{4}+\frac{4^2}{2}-2\times 4\right)-\left(2\sqrt{1}+\frac{1^2}{2}-2\times 1\right)\\ &= 4+8-8-2-\frac{1}{2}+2=4-\frac{1}{2}=\frac{7}{2}.\end{aligned}$$

5. Je cherche une primitive de la fonction $f(x) = x\left(5x^2+1\right)^2$:
   f semble être de la forme $u' \times u^2$, avec $u(x) = 5x^2+1$. Puisque $u'(x) = 10x$, alors
   $$u'(x) \times u(x)^2 = 10x\left(5x^2+1\right)^2 = 10f(x).$$
   Donc une primitive de f est donnée par
   $$F(x) = \frac{1}{10} \times \frac{u(x)^3}{3} = \frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}.$$
   Ainsi
   $$\int_{-1}^{0} x\left(5x^2+1\right)^2 \mathrm{d}x = \left[\frac{\left(5x^2+1\right)^3}{30}\right]_{-1}^{0} = \frac{\left(5\times 0^2+1\right)^3}{30} - \frac{\left(5\times(-1)^2+1\right)^3}{30} = \frac{1}{30} - \frac{216}{30} = -\frac{215}{30} = -\frac{43}{6}.$$

Exercice 2 – [TD11 / Ex9]

1. La fonction F est une primitive de f si et seulement si la fonction f est la dérivée de F.
   Ainsi je choisis de dériver F, de la forme u^4 avec $u(x) = x^3+1$. Comme $u'(x) = 3x^2$, alors
   $$F'(x) = 4 \times u'(x) \times u(x)^3 = 4 \times 3x^2 \times \left(x^3+1\right)^3 = 12x^2\left(x^3+1\right)^3 = f(x).$$
   J'ai montré que $F' = f$, donc que f est la dérivée de F, donc que F est une primitive de f.
2. Comme une primitive de la fonction $f(x) = 12x^2\left(x^3+1\right)^3$ est donnée par $F(x) = \left(x^3+1\right)^4$, alors
   $$\int_0^1 12x^2\left(x^3+1\right)^3 \mathrm{d}x = \left[\left(x^3+1\right)^4\right]_0^1 = \left(1^3+1\right)^4 - \left(0^3+1\right)^4 = 16-1 = 15.$$

Exercice 3 – [DM3 / Extrait de Ex2]

1. Je résous l'équation $x^2+x+1 = 0$ pour $x \in \mathbb{R}$.
   Il s'agit d'un polynôme de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = 1^2 - 4\times 1\times 1 = 1-4 = -3 < 0$.
   Comme le discriminant est strictement négatif, le polynôme n'admet aucune racine.
   L'équation $x^2+x+1 = 0$ n'admet donc pas de solution réelle.
2. Comme f est une fraction rationnelle, je peux raisonner en ne considérant que les termes de plus haut degré. Ainsi
   $$\lim_{x\to+\infty} f(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{1+x+x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+ \quad \text{et} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-.$$
3. Pour déterminer les variations de f, je dois étudier le signe de la dérivée f'.
   La fonction f est de la forme $f = \dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = x$ et $v(x) = x^2+x+1$.
   Comme $u'(x) = 1$ et $v'(x) = 2x+1$, alors
   $$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)\times v(x) - u(x)\times v'(x)}{v(x)^2} = \frac{1\times\left(x^2+x+1\right) - x\times(2x+1)}{\left(x^2+x+1\right)^2} \\ &= \frac{x^2+x+1-2x^2-x}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{1-x^2}{\left(x^2+x+1\right)^2} = \frac{(1+x)(1-x)}{\left(x^2+x+1\right)^2}. \end{aligned}$$
   Il ne me reste plus qu'à étudier le signe de chacun des facteurs pour obtenir le signe de $f'(x)$:
   $$1+x \geqslant 0 \iff x \geqslant -1 \quad \text{et} \quad 1-x \geqslant 0 \iff x \leqslant 1.$$
   Enfin je calcule les images pour le tableau de variation :
   $$f(-1) = \frac{-1}{1+(-1)+(-1)^2} = \frac{-1}{1-1+1} = -1 \quad \text{et} \quad f(1) = \frac{1}{1+1+1^2} = \frac{1}{1+1+1} = \frac{1}{3}.$$

x	$-\infty$		-1		1		$+\infty$
$1+x$		$-$	0	$+$		$+$	
$1-x$		$+$		$+$	0	$-$	
x^2+x+1		$+$		$+$		$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
f	0	$\searrow$	-1	$\nearrow$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	0

4. a) Une équation de la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a est donnée par la formule $y = f'(a) \times (x-a) + f(a)$. Ici $a = 0$ donc l'équation de la tangente devient

$$y = f'(0) \times (x-0) + f(0).$$

Or $f(0) = \dfrac{0}{1+0+0} = 0$ et $f'(0) = \dfrac{1-0^2}{\left(0^2+0+1\right)^2} = \dfrac{1}{1} = 1.$

Donc la tangente au point d'abscisse 0 a pour équation

$$y = 1 \times (x-0) + 0, \qquad \textit{i.e.} \quad y = x.$$

b) Je cherche à résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant x$ pour $x \geqslant -1$:

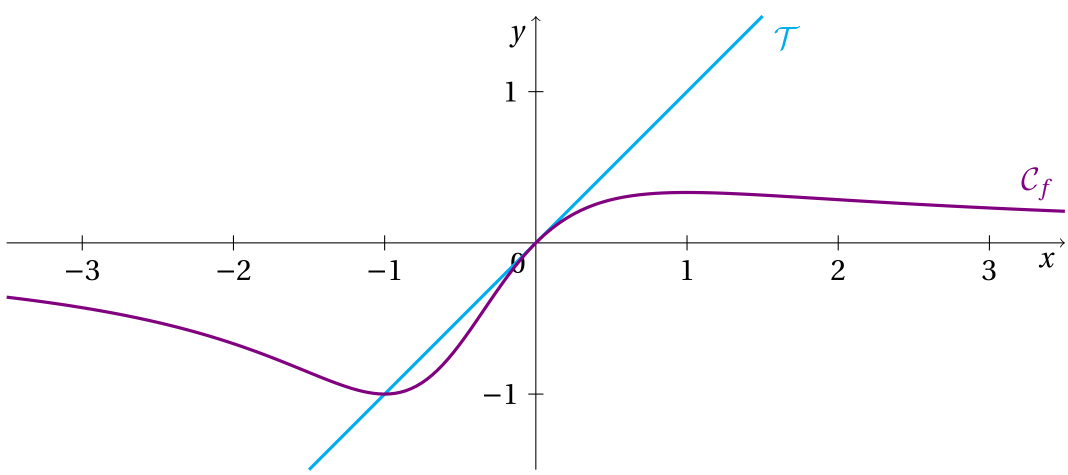
$$\begin{aligned} f(x) \leqslant x \quad &\iff \quad \frac{x}{1+x+x^2} - x \leqslant 0 \quad \iff \quad x - x\left(x^2+x+1\right) \leqslant 0 \qquad \text{car } x^2+x+1>0 \\ &\iff \quad x - x^3 - x^2 - x \leqslant 0 \quad \iff \quad -x^2(x+1) \leqslant 0 \quad \iff \quad x^2(x+1) \geqslant 0. \end{aligned}$$

Or $x^2 \geqslant 0$ sur $\mathbb{R}$ et $x+1 \geqslant 0$ puisque $x \geqslant -1$. Ainsi j'ai bien montré que

$$\forall x \in [-1, +\infty[, \quad f(x) \leqslant x.$$

Graphiquement, cela signifie que la courbe représentative de la fonction f se situe sous la tangente $\mathcal{T}$ sur l'intervalle $[-1, +\infty[$.

5. Voici l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ et de sa tangente $\mathcal{T}$.



Exercice 4 –

1. La fonction f est une fraction rationnelle : elle est donc définie partout où le dénominateur est non nul. Pour trouver les valeurs interdites, je résous $2x+4=0 \iff x=-2$.
Donc f est définie sur $\mathbb{R}\setminus\{-2\}$.

2. Pour les limites en $-\infty$ et $+\infty$, comme il s'agit d'une fraction rationnelle, je ne m'intéresse qu'aux termes de plus haut degré :

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=\lim_{x\to-\infty}\frac{2x^2}{2x}=\lim_{x\to-\infty}x=-\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x\to+\infty}\frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=\lim_{x\to+\infty}x=+\infty.$$

Puis pour les limites en -2^+ et -2^-, je décompose la fraction.
Comme $2\times(-2)^2+5\times(-2)+4=8-10+4=2$,

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-2^+}2x^2+5x+4=\ 2\\ \lim\limits_{x\to-2^+}2x+4=0^+\end{array}\right\}\text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to-2^+}\frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=+\infty.$$

$$\left.\begin{array}{r}\lim\limits_{x\to-2^-}2x^2+5x+4=\ 2\\ \lim\limits_{x\to-2^-}2x+4=0^-\end{array}\right\}\text{Par quotient,} \quad \lim_{x\to-2^-}\frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=-\infty.$$

J'en déduis que la droite d'équation $x=-2$ est asymptote verticale à la courbe.

3. a) Je souhaite trouver a, b et c pour que $f(x)$ soit égale à $ax+b+\dfrac{c}{2x+4}$.
Je procède par équivalence :

$$\begin{aligned}
f(x)=ax+b+\frac{c}{2x+4} &\iff \frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=ax+b+\frac{c}{2x+4}\\
&\iff \frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=\frac{(ax+b)(2x+4)+c}{2x+4}\\
&\iff \frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=\frac{2ax^2+4ax+2bx+4b+c}{2x+4}\\
&\iff \frac{2x^2+5x+4}{2x+4}=\frac{2ax^2+(2b+4a)x+c+4b}{2x+4}\\
&\iff \begin{cases}2a\quad=2\\ 2b+4a=5\\ c+4b\ =4\end{cases} \iff \begin{cases}a=1\\ b=\dfrac{5-4}{2}=\dfrac{1}{2}\\ c=4-2=2\end{cases}
\end{aligned}$$

Finalement, j'ai montré que $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{-2\},\quad f(x)=x+\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{2x+4}$.

b) En utilisant l'expression $f(x)$ obtenue à la question précédente,

$$f(x)-y=x+\frac{1}{2}+\frac{2}{2x+4}-\left(x+\frac{1}{2}\right)=\frac{2}{2x+4}.$$

Ainsi

$$\lim_{x\to+\infty}f(x)-y=\lim_{x\to+\infty}\frac{2}{2x+4}=0^+.$$

Donc la courbe $\mathcal{C}_f$ admet bien la droite Δ d'équation $y=x+\dfrac{1}{2}$ pour asymptote en $+\infty$.

4. La fonction f est de la forme $\dfrac{u}{v}$, avec $u(x) = 2x^2 + 5x + 4$ et $v(x) = 2x + 4$.
   Comme $u'(x) = 4x + 5$ et $v'(x) = 2$, alors

$$f'(x) = \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(4x+5)\times(2x+4) - \left(2x^2+5x+4\right)\times 2}{(2x+4)^2}$$
$$= \frac{8x^2+26x+20-4x^2-10x-8}{(2x+4)^2} = \frac{4x^2+16x+12}{(2x+4)^2} = \frac{4\times\left(x^2+4x+3\right)}{(2x+4)^2}.$$

   J'ai bien montré que pour tout réel $x \in \mathbb{R} \setminus \{-2\}$, $f'(x) = \dfrac{4\times\left(x^2+4x+3\right)}{(2x+4)^2}$.

5. Je calcule le discriminant de $x^2 + 4x + 3$: $\Delta = 4^2 - 4\times 1\times 3 = 16 - 12 = 4 > 0$.
   Donc le polynôme admet deux racines :

$$x_1 = \frac{-4-\sqrt{4}}{2\times 1} = \frac{-4-2}{2} = -3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-4+2}{2} = -1.$$

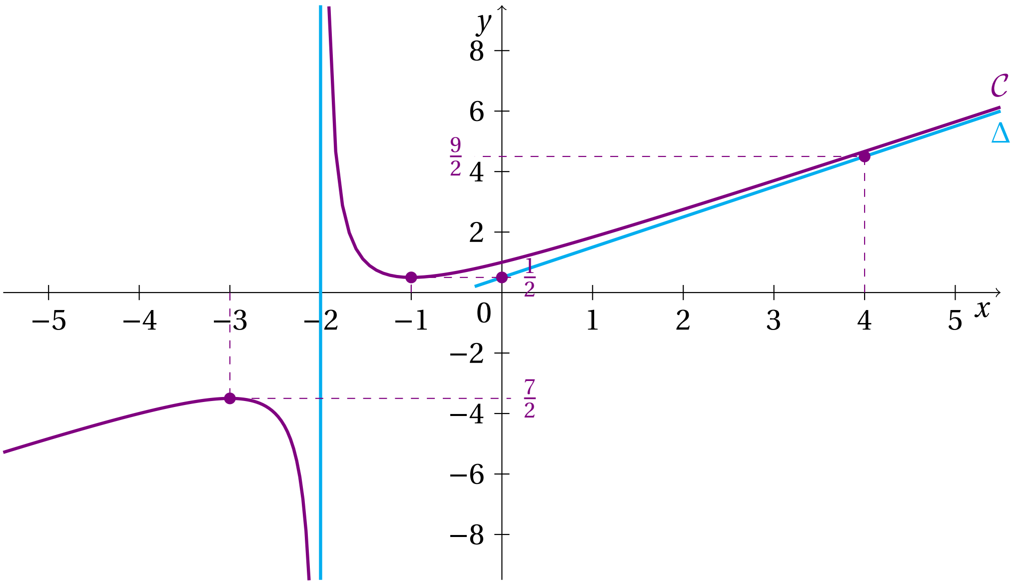
   Par ailleurs, comme un carré est toujours positif, je sais que $(2x+4)^2 > 0$.
   J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f :

x	$-\infty$		-3		-2		-1		$+\infty$
4		$+$		$+$		$+$		$+$	
x^2+4x+3		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
$(2x+4)^2$		$+$		$+$	0	$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
f	$-\infty$	$\nearrow$	$-\frac{7}{2}$	$\searrow$	$-\infty$ $\Vert$ $+\infty$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$+\infty$

   En effet,

$$f(-3) = \frac{2\times(-3)^2+5\times(-3)+4}{2\times(-3)+4} = \frac{18-15+4}{-6+4} = \frac{7}{-2} = -\frac{7}{2}$$
$$\text{et} \quad f(-1) = \frac{2\times(-1)^2+5\times(-1)+4}{2\times(-1)+4} = \frac{2-5+4}{-2+4} = \frac{1}{2}.$$

6. Voici l'allure de la courbe, avec ses asymptotes.



Exercice 5 – [TD10 / Ex14]

Partie I – Probabilités conditionnelles

1. D'après l'énoncé, je sais que

$$P(D) = 0.05, \qquad P(\overline{D}) = 1 - 0.05 = 0.95,$$

$$P_D(\overline{A}) = 0.9, \qquad P_D(A) = 1 - 0.9 = 0.1 \quad \text{et} \quad P_{\overline{D}}(A) = 0.8.$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P\big(A \cap D\big) = P(D) \times P_D(A) = 0.05 \times 0.1 = 0.005.$$

De même,

$$P\big(A \cap \overline{D}\big) = P(\overline{D}) \times P_{\overline{D}}(A) = 0.95 \times 0.8 = 0.760.$$

3. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{D, \overline{D}\}$ forme un système complet d'événements,

$$P(A) = P\big(A \cap D\big) + P\big(A \cap \overline{D}\big) = 0.005 + 0.760 = 0.765.$$

4. Je cherche à déterminer $P_A(D)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_A(D) = \frac{P\big(A \cap D\big)}{P(A)} = \frac{0.005}{0.765} = \frac{1}{153} \approx \frac{1}{150} = \frac{2}{3} \times \frac{1}{100} \approx 0.007.$$

Partie II – Loi binomiale

1. La variable aléatoire X compte le nombre de succès (*i.e.* le nombre d'appareils sans défaut) lors de la répétition de dix expériences de Bernoulli identiques et indépendantes.
Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n = 10$ et $p = 0.95$.
Son support est donné par $X(\Omega) = [\![0, 10]\!]$ et pour tout $k \in X(\Omega)$,

$$P(X = k) = \binom{n}{k} \times p^k \times \big(1-p\big)^{n-k} = \binom{10}{k} \times 0.95^k \times 0.05^{10-k}.$$

2. Si tous les appareils sont sans défaut, alors il y a 10 appareils sans défaut. Je cherche donc à déterminer $P(X=10)$. La probabilité que tous les appareils soient sans défaut est donnée par
$$P(X=10)=\binom{10}{10}\times 0.95^{10}\times 0.05^{0}=0.95^{10}.$$

3. Si au moins un appareil a un défaut, alors il y a au plus 9 appareils sans défaut. Je cherche donc à déterminer $P(X\leqslant 9)$. La probabilité qu'au moins un appareil ait un défaut est donnée par
$$P(X\leqslant 9)=1-P(X=10)=1-0.95^{10}.$$

Exercice 6 – [adapté de DM3 / Ex1]

1. D'après la formule des probabilités totales, comme $\{R,\overline{R}\}$ forme un système complet d'événements et que $\dfrac{75}{100}=\dfrac{3}{4}$, alors
$$\begin{aligned}P(J)&=P\big(R\cap J\big)+P\big(\overline{R}\cap J\big)=P(R)\times P_R(J)+P(\overline{R})\times P_{\overline{R}}(J)\\&=\frac{3}{4}\times 1+\left(1-\frac{3}{4}\right)\times\frac{1}{4}=\frac{3}{4}+\frac{1}{16}=\frac{13}{16}.\end{aligned}$$
En effet, si l'élève connaît la réponse, il répond correctement avec probabilité 1, contre une probabilité $\dfrac{1}{4}$ s'il ne connaît pas la réponse et répond donc au hasard.
2. Les vingt questions représentent $n=20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli de succès "répondre correctement" et de probabilité $p=\dfrac{13}{16}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire X compte le nombre de succès.
Ainsi X suit une loi binomiale de paramètres $n=20$ et $p=\dfrac{13}{16}$.
Le support de X est donné par $X(\Omega)=[\![0,20]\!]$ et pour tout $k\in[\![0,20]\!]$,
$$P(X=k)=\binom{n}{k}\times p^k\times\big(1-p\big)^{n-k}=\binom{20}{k}\times\left(\frac{13}{16}\right)^k\times\left(\frac{3}{16}\right)^{20-k}.$$
3. Comme X suit une loi binomiale, alors
$$E(X)=np=20\times\frac{13}{16}=\frac{65}{4}\quad\text{et}\quad V(X)=np(1-p)=\frac{65}{4}\times\frac{3}{16}=\frac{195}{64}.$$
4. a) Par définition de X, il y a X bonnes réponses, rapportant 1 point chacune, et donc $20-X$ mauvaises réponses, rapportant -1 point chacune.
Ainsi la note finale est donnée par la formule
$$N=1\times X+(-1)\times(20-X)=X-20+X=2X-20.$$
b) Comme $N=2X-20$, alors par linéarité de l'espérance,
$$E(N)=E\big(2X-20\big)=2E(X)-20=2\times\frac{65}{4}-20=\frac{65-40}{2}=\frac{25}{2}=12.5$$
$$\text{et}\quad V(N)=V\big(2X-20\big)=2^2\times V(X)=4\times\frac{195}{64}=\frac{195}{16}.$$

5. a) Il s'agit cette fois encore de $n = 20$ répétitions d'une expérience de Bernoulli de succès "répondre correctement" mais de probabilité $p = \frac{3}{4}$. Ces répétitions sont identiques et indépendantes et la variable aléatoire Y compte le nombre de succès.
Ainsi Y suit une loi binomiale de paramètres $n = 20$ et $p = \frac{3}{4}$.
b) La note moyenne obtenue par l'élève B correspond à l'espérance de Y, *i.e.*
$$E(Y) = np = 20 \times \frac{3}{4} = 15.$$
c) En comparant les notes moyennes obtenues par les élèves A et B dans le cas de points négatifs en cas de mauvaises réponses, à savoir 12.5 pour l'élève A et 15 pour l'élève B, il vient naturellement en conclusion que la meilleure stratégie est de ne pas répondre au hasard aux questions pour lesquelles la réponse n'est pas connue.
C'est donc l'élève B qui possède la meilleure stratégie.

Exercice 7 – [CB1 / Ex12]

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé,
$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$
2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, alors
$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P\big(A_n \cap A_{n+1}\big) + P\big(\overline{A_n} \cap A_{n+1}\big) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times P(\overline{A_n}) = 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times \big(1 - P(A_n)\big) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2. \end{aligned}$$
Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, j'ai bien montré que $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
3. a) Pour montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est géométrique, j'exprime u_{n+1} en fonction de u_n.
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) - 0.2 = 0.5u_n + 0.2 - 0.2 = 0.5u_n.$$
Ainsi $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par
$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$
b) Comme $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.5$ et de premier terme $u_1 = -0.2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$
Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,
$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$
4. La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2 < 0$ et de raison $q = 0.5 \in \left]0,1\right[$. Donc la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de termes négatifs.
Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ partage la même variation que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, elle est donc elle aussi croissante.
5. Comme $0.5 \in \left]-1,1\right[$, alors $\lim\limits_{n\to+\infty} 0.5^{n-1} = 0$ et la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est 0.
Et par opérations sur les limites,
$$\lim_{n\to+\infty} p_n = \lim_{n\to+\infty} 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1} = 0.4 - 0.2 \times 0 = 0.4.$$

Exercice 8 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$, en utilisant $0 < u_n < 1$ à la place de $u_n \in \left]0, 1\right[$.

   Énoncé : Je note $\mathcal{P}_n$ la propriété : $0 < u_n < 1$.

   Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 0.4$ et $0 < 0.4 < 1$. Ainsi $\mathcal{P}_0$ est vraie.

   Hérédité : Soit $n \geqslant 0$. Je suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie et je montre que $\mathcal{P}_{n+1}$ l'est aussi.
   Par hypothèse de récurrence, je sais que $0 < u_n < 1$, alors comme la fonction $g(x) = x^3$ est strictement croissante sur l'intervalle $\left[0, 1\right]$,

   $$0 < u_n < 1 \iff g(0) < g(u_n) < g(1) \iff 0^3 = 0 < u_{n+1} < 1 = 1^3.$$

   Finalement $\mathcal{P}_{n+1}$ est vraie et la propriété est héréditaire.

   Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, $\mathcal{P}_n$ est vraie pour tout $n \geqslant 0$, *i.e.*

   $$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 < u_n < 1.$$

2. Je calcule la différence entre deux termes consécutifs. Pour tout $n \in \mathbb{N}$,

   $$u_{n+1} - u_n = u_n^3 - u_n = u_n\left(u_n^2 - 1\right) = u_n(u_n + 1)(u_n - 1) < 0.$$

   Or j'ai montré que $0 < u_n < 1$, donc $u_n > 0$, $u_n + 1 > 1 > 0$ et $u_n - 1 < 0$.
   Finalement $u_{n+1} - u_n < 0$, *i.e.* $u_{n+1} < u_n$.
   La suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est donc bien strictement décroissante.

3. En combinant les deux questions précédentes, je sais que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et qu'elle est minorée par 0. Donc grâce au théorème de la limite monotone, j'en déduis que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente.
   Je note ℓ sa limite, de sorte que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = \ell$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} u_{n+1} = \ell$.
   Puisque $u_{n+1} = u_n^3$, en faisant tendre n vers l'infini et en passant à la limite, j'obtiens

   $$\ell = \ell^3 \iff \ell^3 - \ell = 0 \iff \ell\big(\ell + 1\big)\big(\ell - 1\big) = 0 \iff \ell \in \big\{-1, 0, 1\big\}.$$

   Comme pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in \left]0, 1\right[$, alors ℓ ne peut pas être égal à -1.
   Aussi $u_0 = 0.4$ et $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante donc ℓ ne peut pas valoir 1.
   Alors j'en conclus que

   $$\ell = \lim_{n\to+\infty} u_n = 0.$$