

CONCOURS BLANC 1

Exercice 1 –

$$1. 2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = \frac{4}{2} = 2$$

Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

$$2. 4(x - 1) + 3(2x - 1) = 0 \iff 4x - 4 + 6x - 3 = 0 \iff 10x = 7 \iff x = \frac{7}{10}$$

Donc $\mathcal{S} = \left\{ \frac{7}{10} \right\}$.

$$3. x^2 + 2x + 3 = x(x - 1) \iff x^2 + 2x + 3 = x^2 - x \iff 3x + 3 = 0 \iff 3x = -3 \iff x = -1$$

Donc $\mathcal{S} = \{-1\}$.

$$4. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = (-7)^2 - 4 \times 1 \times 10 = 49 - 40 = 9 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-7) - \sqrt{9}}{2 \times 1} = \frac{7 - 3}{2} = 2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{7 + 3}{2} = 5.$$

Et $\mathcal{S} = \{2, 5\}$.

$$5. 2x(x + 1) = -1 \iff 2x^2 + 2x = -1 \iff 2x^2 + 2x + 1 = 0$$

Je calcule le discriminant : $\Delta = 2^2 - 4 \times 2 \times 1 = 4 - 8 = -4 < 0$.

Le polynôme n'admet donc pas de racine. Et $\mathcal{S} = \emptyset$.

$$6. x(x + 1) - (4x - 1)(x + 3) = x^2 - 2x + 1 \iff x^2 + x - (4x^2 + 12x - x - 3) = x^2 - 2x + 1$$

$$\iff x^2 + x - 4x^2 - 12x + x + 3 - x^2 + 2x - 1 = 0 \iff -4x^2 - 8x + 2 = 0$$

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times (-4) \times 2 = 64 + 32 = 96 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines, et en remarquant que $\sqrt{96} = \sqrt{16} \times \sqrt{6} = 4\sqrt{6}$:

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{96}}{2 \times (-4)} = \frac{8 - 4\sqrt{6}}{-8} = \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + \sqrt{96}}{-8} = \frac{8 + 4\sqrt{6}}{-8} = -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1.$$

Et $\mathcal{S} = \left\{ -\frac{\sqrt{6}}{2} - 1, \frac{\sqrt{6}}{2} - 1 \right\}$.

$$7. -2x + 3 > 0 \iff 3 > 2x \iff 2x < 3 \iff x < \frac{3}{2}$$

Donc $\mathcal{S} = \left] -\infty, \frac{3}{2} \right[$.

$$8. \text{ Je calcule le discriminant : } \Delta = 5^2 - 4 \times (-1) \times (-6) = 25 - 24 = 1 > 0.$$

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-5 - \sqrt{1}}{2 \times (-1)} = \frac{-5 - 1}{-2} = 3 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-5 + 1}{-2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant, comme $a = -1 < 0$:

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$	
$-x^2 + 5x - 6$	-	0	+	0	-

Donc $\mathcal{S} =]2, 3[$.

9. $2x(x-2) \leq x^2 - 4 \iff 2x^2 - 4x \leq x^2 - 4 \iff x^2 - 4x + 4 \leq 0$

Je calcule le discriminant : $\Delta = (-4)^2 - 4 \times 1 \times 4 = 16 - 16 = 0$.

Le polynôme admet donc une unique racine :

$$x_0 = -\frac{-4}{2 \times 1} = \frac{4}{2} = 2.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	2	$+\infty$
$x^2 - 2x + 4$	$+$	0	$+$

Donc $\mathcal{S} = \{2\}$.

10. $\frac{1}{x+3} - \frac{2}{x-1} = 0 \iff \frac{x-1}{(x-1)(x+3)} - \frac{2(x+3)}{(x-1)(x+3)} = 0$
 $\iff \frac{x-1-2x-6}{(x-1)(x+3)} = 0 \iff \frac{-x-7}{(x-1)(x+3)} = 0$

Je commence par chercher les valeurs interdites :

$$(x-1)(x+3) = 0 \iff x-1 = 0 \text{ ou } x+3 = 0 \iff x = 1 \text{ ou } x = -3.$$

Par ailleurs, $-x-7 = 0 \iff x = -7$. Or -7 n'est pas valeur interdite. Donc $\mathcal{S} = \{-7\}$.

11. $\frac{x}{2x-4} + \frac{3}{-2x+1} \leq \frac{1}{2} \iff \frac{2x(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} + \frac{6(2x-4)}{(2x-4)(-2x+1)} - \frac{(2x-4)(-2x+1)}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0$
 $\iff \frac{-4x^2 + 2x + 12x - 24 + 4x^2 - 2x - 8x + 4}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0 \iff \frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)} \leq 0$

Or $4x-20 \geq 0 \iff x \geq \frac{20}{4} = 5$, $2x-4 \geq 0 \iff x \geq \frac{4}{2} = 2$ et $-2x+1 \geq 0 \iff x \leq \frac{1}{2}$.

J'en déduis le tableau de signe suivant :

x	$-\infty$	$\frac{1}{2}$	2	5	$+\infty$
$4x - 20$	$-$	$-$	$-$	0	$+$
$2x - 4$	$-$	$-$	0	$+$	$+$
$-2x + 1$	$+$	0	$-$	$-$	$-$
$\frac{4x-20}{(2x-4)(-2x+1)}$	$+$	$-$	$+$	0	$-$

Donc $\mathcal{S} = \left] \frac{1}{2}, 2 \right[\cup [5, +\infty[$.

12. Tout d'abord, $(-1)^3 - 7 \times (-1) - 6 = -1 + 7 - 6 = 0$ donc -1 est une racine du polynôme. J'effectue alors la division euclidienne de $x^3 - 7x - 6$ par $x - (-1) = x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 x^3 \qquad \qquad - \quad 7x \quad - \quad 6 \\
 - \quad (x^3 + \quad x^2) \\
 \hline
 \qquad \quad -x^2 \quad - \quad 7x \quad - \quad 6 \\
 \qquad \quad - \quad (-x^2 \quad - \quad x) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad -6x \quad - \quad 6 \\
 \qquad \qquad \qquad - \quad (-6x \quad - \quad 6) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 x+1 \\
 \hline
 x^2 - x - 6
 \end{array}
 \end{array}$$

Je calcule désormais le discriminant de $x^2 - x - 6$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times 1 \times (-6) = 1 + 24 = 25 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{25}}{2 \times 1} = \frac{1 - 5}{2} = -2 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 5}{2} = 3.$$

Finalement, j'obtiens donc $\mathcal{S} = \{-2, -1, 3\}$.

13. Tout d'abord, $-2^3 + 2^2 + 22 \times 2 - 40 = -8 + 4 + 44 - 40 = 0$ donc 2 est une racine du polynôme. J'effectue alors la division euclidienne de $-x^3 + x^2 + 22x - 40$ par $x - 2$:

$$\begin{array}{r|l}
 \begin{array}{r}
 -x^3 \quad + \quad x^2 \quad + \quad 22x \quad - \quad 40 \\
 - \quad (-x^3 \quad + \quad 2x^2) \\
 \hline
 \qquad \quad -x^2 \quad + \quad 22x \quad - \quad 40 \\
 \qquad \quad - \quad (-x^2 \quad + \quad 2x) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad 20x \quad - \quad 40 \\
 \qquad \qquad \qquad - \quad (20x \quad - \quad 40) \\
 \hline
 \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad \qquad 0
 \end{array} & \begin{array}{l}
 x-2 \\
 \hline
 -x^2 - x + 20
 \end{array}
 \end{array}$$

Je calcule désormais le discriminant de $-x^2 - x + 20$: $\Delta = (-1)^2 - 4 \times (-1) \times 20 = 1 + 80 = 81 > 0$. Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-1) - \sqrt{81}}{2 \times (-1)} = \frac{1 - 9}{-2} = 4 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1 + 9}{-2} = -5.$$

J'en déduis le tableau de signe suivant pour $-x^3 + x^2 + 22x - 40 = (x - 2)(-x^2 - x + 20)$:

x	$-\infty$	-5	2	4	$+\infty$			
$x - 2$		-	-	0	+	+		
$-x^2 - x + 20$		-	0	+	+	0	-	
$-x^3 + x^2 + 22x - 40$		+	0	-	0	+	0	-

Finalement, j'obtiens donc $\mathcal{S} =]-\infty, -5[\cup]2, 4[$.

Exercice 2 –

1. a) Comme $P(-1) = -3 - 7 + 7 + 3 = 0$, le polynôme $P(x)$ se factorise par $x - (-1) = x + 1$.
 Donc il existe un polynôme $Q(x)$, de degré $3 - 1 = 2$, tel que $P(x) = (x + 1)Q(x)$.
 Je détermine ce polynôme $Q(x)$ en effectuant la division euclidienne de $P(x)$ par $x + 1$:

$$\begin{array}{r|l}
 3x^3 & - & 7x^2 & - & 7x & + & 3 & & x + 1 \\
 - (3x^3 & + & 3x^2) & & & & & & \hline
 & & -10x^2 & - & 7x & + & 3 & & \\
 & & - (-10x^2 & - & 10x) & & & & \\
 & & & & 3x & + & 3 & & \\
 & & & & - (3x & + & 3) & & \\
 & & & & & & 0 & &
 \end{array}$$

Finalement, $Q(x) = 3x^2 - 10x + 3$ et $P(x) = (x + 1)(3x^2 - 10x + 3)$.

- b) Grâce à la factorisation obtenue à la question précédente, il ne me reste plus qu'à traiter le facteur de degré 2. Son discriminant vaut $\Delta = (-10)^2 - 4 \times 3 \times 3 = 100 - 36 = 64 > 0$.
 Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-10) - \sqrt{64}}{2 \times 3} = \frac{10 - 8}{6} = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{10 + 8}{6} = 3.$$

Finalement l'équation $3x^3 - 7x^2 - 7x + 3 = 0$ admet trois solutions : $\mathcal{S} = \left\{ -1, \frac{1}{3}, 3 \right\}$.

2. a) Afin de déterminer l'ensemble de définition, je cherche les valeurs interdites, qui sont les solutions de l'équation $3x^2 - 12x + 12 = 0$. Le discriminant de ce polynôme vaut $\Delta = (-12)^2 - 4 \times 3 \times 12 = 144 - 144 = 0$. Ce polynôme admet donc une unique racine :

$$x_0 = -\frac{-12}{2 \times 3} = \frac{12}{6} = 2.$$

Donc l'ensemble de définition de f est $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- b) J'établis désormais le tableau de signe de $f(x) = \frac{(x + 1)(3x^2 - 10x + 3)}{3x^2 - 12x + 12}$.

x	$-\infty$	-1	$\frac{1}{3}$	2	3	$+\infty$		
$x + 1$	-	0	+	+	+	+		
$3x^2 - 10x + 3$	+	+	0	-	-	0	+	
$3x^2 - 12x + 12$	+	+	+	0	+	+		
$f(x)$	-	0	+	0	-	-	0	+

Et donc l'ensemble des solutions de l'inéquation $f(x) \geq 0$ est donné par

$$\mathcal{S} = \left[-1, \frac{1}{3} \right] \cup [3, +\infty[.$$

Exercice 3 –

1. Les fonctions f et g sont des fonctions polynomiales donc elles sont définies sur \mathbb{R} .
Par ailleurs,

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty,$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty.$$

2. Je calcule $f(2)$ et $g(2)$ pour prouver que ces deux valeurs sont égales à 17 :

$$f(2) = 8 + 24 - 10 - 5 = 17 \quad \text{et} \quad g(2) = 8 + 4 + 5 = 17.$$

Donc le point de coordonnées $(2, 17)$ est bien un point des deux courbes \mathcal{C}_f et \mathcal{C}_g .

3. D'après la question précédente, $f(2) - g(2) = 17 - 17 = 0$. Donc 2 est racine du polynôme $f(x) - g(x)$. Donc il existe un polynôme $Q(x)$ de degré $3 - 1 = 2$ tel que $f(x) - g(x) = (x - 2)Q(x)$.
4. Je détermine ce polynôme $Q(x)$ par division euclidienne : $f(x) - g(x) = x^3 + 4x^2 - 7x - 10$ et

$$\begin{array}{r|l} x^3 + 4x^2 - 7x - 10 & x - 2 \\ - (x^3 - 2x^2) & \hline \hline 6x^2 - 7x - 10 & \\ - (6x^2 - 12x) & \\ \hline 5x - 10 & \\ - (5x - 10) & \\ \hline 0 & \end{array}$$

Finalement, $Q(x) = x^2 + 6x + 5$ et $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 5)$.
Je cherche désormais le signe de $Q(x)$ pour en déduire celui de $f(x) - g(x)$.
Son discriminant vaut $\Delta = 6^2 - 4 \times 1 \times 5 = 36 - 20 = 16 > 0$.
Ce polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-6 - \sqrt{16}}{2 \times 1} = \frac{-6 - 4}{2} = -5 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{-6 + 4}{2} = -1.$$

J'établis donc le tableau de signe de $f(x) - g(x) = (x - 2)(x^2 + 6x + 5)$.

x	$-\infty$		-5		-1		2		$+\infty$
$x - 2$		$-$		$-$		$-$	0		$+$
$x^2 + 6x + 5$		$+$	0	$-$	0	$+$			$+$
$f(x) - g(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0		$+$

Ainsi,

- \mathcal{C}_f est en dessous de \mathcal{C}_g lorsque $f(x) \leq g(x)$, i.e. sur $] -\infty, -5] \cup [-1, 2]$,
- \mathcal{C}_f est au-dessus de \mathcal{C}_g lorsque $f(x) \geq g(x)$, i.e. sur $[-5, -1] \cup [2, +\infty[$.

Exercice 4 –

1. a) Par lecture graphique, le tableau de variation de la fonction f est le suivant :

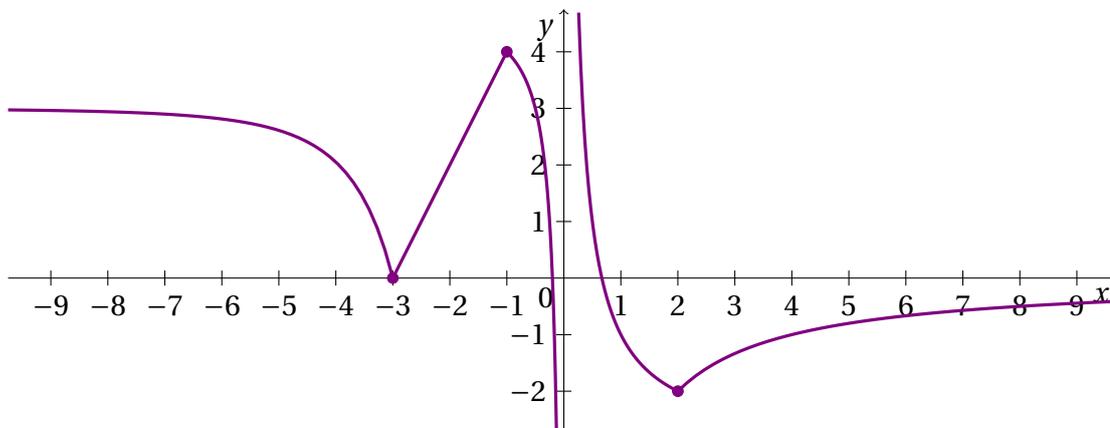
x	$-\infty$	-2	4	$+\infty$
f	2	$+\infty$	$+\infty$	2

Le tableau de signe de la fonction f est le suivant :

x	$-\infty$	-2	3	4	7	$+\infty$	
$f(x)$	$+$	$-$	0	$+$	$-$	0	$+$

- b) (i) FAUX L'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions : $x \approx 3$ et $x \approx 7$.
- (ii) FAUX La courbe \mathcal{C}_f admet une asymptote horizontale d'équation $y = 2$, à la fois en $-\infty$ et en $+\infty$.
- (iii) VRAI La fonction f est croissante sur $[-2, 2]$ et $f(2) \approx -1$.
- (iv) FAUX La fonction f est strictement croissante sur $] -2, 4[$ et sur $]4, +\infty[$, mais f n'est même pas définie en 4.

2. a) La courbe suivante correspond au tableau de variation de la fonction g :



- b) (i) FAUX L'équation $g(x) = 0$ admet une solution en $x = -3$ et une autre solution dans l'intervalle $] -1, 0[$.
- (ii) VRAI Comme $\lim_{x \rightarrow 0^-} g(x) = -\infty$ et $\lim_{x \rightarrow 0^+} g(x) = +\infty$, il y a bien une asymptote verticale d'équation $x = 0$.
- (iii) VRAI La fonction g est croissante sur $[2, +\infty[$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} g(x) = 0$.
- (iv) FAUX La fonction g est décroissante sur $] -\infty, -3]$, la notation $[3, 0]$ ne décrit même pas un intervalle.

Exercice 5 –

1. Je calcule u_1 et u_2 . À la fin du premier mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, i.e. $100\,000 \times 0.01 = 1\,000$, et retirer 2000 de mon premier remboursement mensuel. Ainsi

$$u_1 = 100\,000 + 1\,000 - 2\,000 = 99\,000.$$

De la même manière, à la fin du deuxième mois, je dois ajouter 1% à la somme à rembourser, *i.e.* $99\,000 \times 0.01 = 990$, et retirer 2 000 de mon deuxième remboursement mensuel.

Ainsi

$$u_2 = 99\,000 + 990 - 2\,000 = 97\,990.$$

2. La somme qu'il reste à rembourser à la fin du n -ième mois d'emprunt est donnée par u_n . Le taux mensuel étant de 1%, ce montant augmente de 1%. Autrement dit, il est multiplié par 1.01. Après remboursement de 2 000 euros, le montant u_{n+1} restant à rembourser est donc donné par

$$u_{n+1} = 1.01u_n - 2\,000.$$

3. Pour montrer que la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est géométrique, j'exprime v_{n+1} en fonction de v_n .

Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\begin{aligned} v_{n+1} &= u_{n+1} - 200\,000 = 1.01u_n - 2\,000 - 200\,000 = 1.01(v_n + 200\,000) - 2\,000 - 200\,000 \\ &= 1.01v_n + 202\,000 - 2\,000 - 200\,000 = 1.01v_n. \end{aligned}$$

Ainsi $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 1.01. Son premier terme est donné par

$$v_0 = u_0 - 200\,000 = 100\,000 - 200\,000 = -100\,000.$$

4. La suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ étant géométrique de premier terme $v_0 = -100\,000$ et de raison $q = 1.01$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n = v_0 \times q^n = -100\,000 \times (1.01)^n.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$u_n = v_n + 200\,000 = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^n.$$

5. Il me suffit de remplacer n par 69 dans la formule explicite trouvée à la question précédente :

$$u_{69} = 200\,000 - 100\,000 \times (1.01)^{69} \approx 200\,000 - 100\,000 \times 1.99 = 1\,000.$$

6. Grâce à la question précédente, après 69 mois, il ne reste plus qu'environ 1 000 euros à rembourser. Ainsi il faudra donc 70 mois à cette personne pour rembourser son crédit, avec un dernier remboursement d'un montant d'environ 1 000 euros.

Exercice 6 –

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé, je sais que

$$\begin{aligned} P(S) &= 0.3, & P(\bar{S}) &= 1 - 0.3 = 0.7, & P_S(E) &= 1 - 0.223 = 0.777, \\ P_S(\bar{E}) &= 0.223, & P_{\bar{S}}(E) &= 0.827 & \text{et} & P_{\bar{S}}(\bar{E}) &= 1 - 0.827 = 0.173. \end{aligned}$$

2. D'après la formule des probabilités composées,

$$P(S \cap \bar{E}) = P(S) \times P_S(\bar{E}) = 0.3 \times 0.223 = 0.0669.$$

Autrement dit, la probabilité que la personne interrogée ait plus de 50 ans et qu'elle travaille à temps partiel est de 0.0669, *i.e.* 6.69%.

3. Je cherche ici $P(\bar{E})$. D'après la formule des probabilités totales, comme S et \bar{S} forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P(\bar{E}) &= P(S \cap \bar{E}) + P(\bar{S} \cap \bar{E}) = P(S) \times P_S(\bar{E}) + P(\bar{S}) \times P_{\bar{S}}(\bar{E}) \\ &= 0.3 \times 0.223 + 0.7 \times 0.173 = 0.0669 + 0.1211 = 0.188. \end{aligned}$$

4. Je cherche ici $P_{\bar{E}}(S)$. D'après la formule des probabilités conditionnelles,

$$P_{\bar{E}}(S) = \frac{P(S \cap \bar{E})}{P(\bar{E})} = \frac{0.0669}{0.188} = \frac{669}{1880}.$$

Exercice 7 – Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n > 0$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = 2$ et $2 > 0$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n > 0$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n + 4 > 2 \times 0 + 4 = 4 > 0.$$

Donc $u_{n+1} > 0$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n > 0.$$

Exercice 8 –

1. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$.

Initialisation : Pour $n = 1$, $\sum_{k=1}^1 2^k = 2^1 = 2$ et $2 \times (2^1 - 1) = 2 \times 1 = 2$. Ainsi \mathcal{P}_1 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 1$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $\sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1)$. Alors

$$\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = \sum_{k=1}^n 2^k + 2^{n+1} = 2(2^n - 1) + 2^{n+1} = 2^{n+1} - 2 + 2^{n+1} = 2^{n+2} - 2 = 2(2^{n+1} - 1).$$

Donc $\sum_{k=1}^{n+1} 2^k = 2(2^{n+1} - 1)$. Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 1$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 1$, *i.e.*

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad \sum_{k=1}^n 2^k = 2(2^n - 1).$$

2. Je sais que pour tout $q \in \mathbb{R} \setminus \{1\}$,

$$\sum_{k=0}^n q^k = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Alors pour $q = 2$, j'obtiens

$$\sum_{k=0}^n 2^k = \frac{2^{n+1} - 1}{2 - 1} = 2^{n+1} - 1.$$

Il me reste alors à retirer le terme correspondant à $k = 0$, puis à mettre 2 en facteur :

$$\sum_{k=1}^n 2^k = \left(\sum_{k=0}^n 2^k \right) - 2^0 = (2^{n+1} - 1) - 1 = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1).$$

Exercice 9 –

1. Il suffit de remplacer x par -2 :

$$\lim_{x \rightarrow -2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6 = 2 \times (-8) - 4 + 5 \times (-2) + 6 = -16 - 4 - 10 + 6 = -24.$$

2. Il suffit de remplacer x par -1 :

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{x-2}{2x-3} = \frac{-1-2}{-2-3} = \frac{-3}{-5} = \frac{3}{5}.$$

3. Je décompose numérateur et dénominateur :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 1 = 3 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} -2x + 4 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-1}{-2x+4} = +\infty.$$

4. Je décompose numérateur et dénominateur :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 0^+} 3x - 1 = -1 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} x(x+1) = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{3x-1}{x(x+1)} = -\infty.$$

5. Je décompose chacun des termes de la somme :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{x} = 0 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{2x^2} = 0 \end{array} \right\} \text{Par somme, } \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 - \frac{1}{x} + \frac{3}{2x^2} = 2.$$

6. Je ne garde que la limite du terme de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7 = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x^3 = -\infty.$$

7. Je ne garde que la limite du quotient des termes de plus haut degré :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 - 2x + 1}{-4x^3 + 2x - 5} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{-4x^3} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{-4x} = 0^-.$$

8. Je décompose chacun des facteurs du produit :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} -2x^2 = -\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x+1}{x+5} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \end{array} \right\} \text{Par produit, } \lim_{x \rightarrow -\infty} (-2x^2 + 1) \times \frac{2x+1}{x+5} = -\infty.$$

9. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} = 0^+ \text{ donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3}{x} + 16 = 16 \text{ et donc } \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{\frac{3}{x} + 16} = \sqrt{16} = 4.$$

10. Je raisonne par composition :

$$\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{-3}{-x+2} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} = +\infty \text{ donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 = +\infty$$

$$\text{et donc } \lim_{x \rightarrow 2^+} \left(\sqrt{\frac{-3}{-x+2}} - 2 \right)^3 = +\infty.$$

Exercice 10 –

1. a) La fonction f est une fraction rationnelle, elle est donc définie partout en dehors de ses valeurs interdites. Celles-ci correspondent à une annulation du dénominateur,

$$i.e. \quad 2x - 4 = 0 \iff 2x = 4 \iff x = 2.$$

Donc la fonction f est définie sur $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$.

- b) Je ne garde que le quotient des termes de plus haut degré en les bornes infinies :

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x}{2} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{2} = +\infty.$$

Je décompose numérateur et dénominateur en la valeur interdite :

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^-} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^-} 2x - 4 = 0^- \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = -\infty.$$

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{x \rightarrow 2^+} x^2 - 2x + 1 = 1 \\ \lim_{x \rightarrow 2^+} 2x - 4 = 0^+ \end{array} \right\} \text{Par quotient, } \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = +\infty.$$

Graphiquement, cela donne une asymptote verticale d'équation $x = 2$ (et possiblement deux asymptotes obliques en $-\infty$ et $+\infty$ mais il reste encore du travail pour le prouver).

- c) Je remarque que

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x + 1}{2x - 4} = \frac{x(x - 2) + 1}{2x - 4} = \frac{x(x - 2)}{2(x - 2)} + \frac{1}{2x - 4} = \frac{x}{2} + \frac{1}{2x - 4} = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2x - 4},$$

ce qui m'amène à poser $a = \frac{1}{2}$, $b = 0$ et $c = 1$.

Comme $f(x) - \frac{x}{2} = \frac{1}{2x - 4}$ et que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2x - 4} = 0$, j'en déduis que la droite \mathcal{D} d'équation $y = \frac{x}{2}$ est bien asymptote oblique à la courbe \mathcal{C}_f au voisinage de $+\infty$.

2. a) La fonction f est de la forme $\frac{u}{v}$ avec $u(x) = x^2 - 2x + 1$ et $v(x) = 2x - 4$.
Comme $u'(x) = 2x - 2$ et $v'(x) = 2$, alors

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{u'(x)v(x) - u(x)v'(x)}{v(x)^2} = \frac{(2x - 2)(2x - 4) - 2(x^2 - 2x + 1)}{(2x - 4)^2} \\ &= \frac{4x^2 - 8x - 4x + 8 - 2x^2 + 4x - 2}{(2x - 4)^2} = \frac{2x^2 - 8x + 6}{(2x - 4)^2}. \end{aligned}$$

- b) Les variations de f s'obtiennent grâce au signe de la dérivée $f'(x)$.

Je calcule donc le discriminant du numérateur : $\Delta = (-8)^2 - 4 \times 2 \times 6 = 64 - 48 = 16 > 0$.

Le polynôme admet donc deux racines :

$$x_1 = \frac{-(-8) - \sqrt{16}}{2 \times 2} = \frac{8 - 4}{4} = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{8 + 4}{4} = 3.$$

Par ailleurs, puisque $2x - 4 = 0 \iff x = 2$, je peux déduire le tableau de signe de $f'(x)$ et par la même occasion, le tableau de variation de f .

$$\text{Aussi, } f(1) = \frac{1^2 - 2 \times 1 + 1}{2 \times 1 - 4} = \frac{0}{-2} = 0 \quad \text{et} \quad f(3) = \frac{3^2 - 2 \times 3 + 1}{2 \times 3 - 4} = \frac{4}{2} = 2.$$

x	$-\infty$	1	2	3	$+\infty$	
$2x^2 - 8x + 6$	+	0	-	-	0	+
$(2x - 4)^2$	+		+	0	+	+
$f'(x)$	+	0	-	-	0	+
f	$-\infty$	\nearrow 0 \searrow $-\infty$		$+\infty$ \searrow 2 \nearrow $+\infty$		

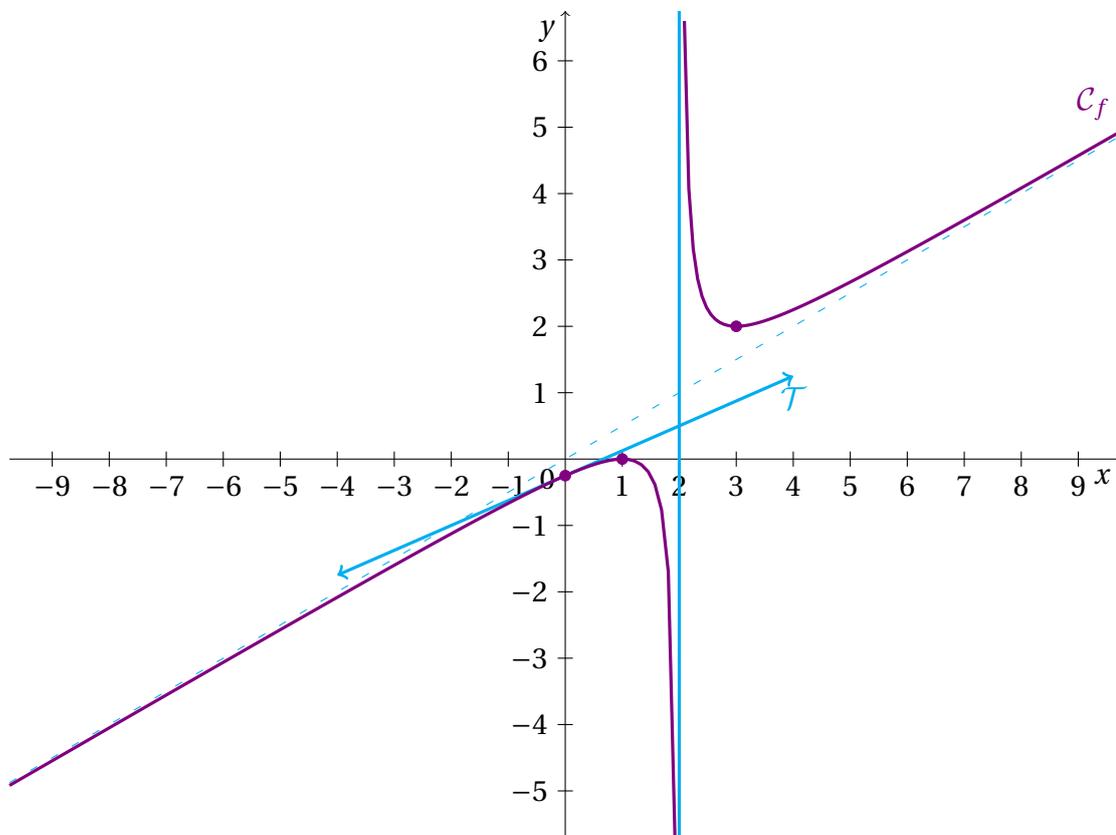
c) Une équation de la tangente est donnée par $y = f'(a)(x - a) + f(a)$. Ici $a = 0$ et

$$f(0) = \frac{0^2 - 2 \times 0 + 1}{2 \times 0 - 4} = -\frac{1}{4} \quad \text{et} \quad f'(0) = \frac{2 \times 0^2 - 8 \times 0 + 6}{(2 \times 0 - 4)^2} = \frac{6}{16} = \frac{3}{8}.$$

Donc une équation de la tangente \mathcal{T} au point d'abscisse 0 est donnée par

$$y = \frac{3}{8}(x - 0) - \frac{1}{4}, \quad \text{i.e.} \quad y = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}.$$

3. Je peux désormais tracer l'allure de la courbe en me servant des asymptotes, de la tangente et du tableau de variation :



Exercice 11 –

Partie A

1. La fonction f est une fonction polynomiale, je dérive donc terme à terme et j'obtiens que

$$f'(x) = 2x - 1.$$

$$\text{Or } 2x - 1 \geq 0 \iff x \geq \frac{1}{2}.$$

J'en déduis alors le tableau de signe de $f'(x)$ et le tableau de variation de f .

$$\text{Aussi, } \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0^2 + 1 - 0 = 1, \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4} + 1 - \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \quad \text{et} \quad \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 1^2 + 1 - 1 = 1.$$

x	0	$\frac{1}{2}$	1
$2x - 1$	-	0	+
$f'(x)$	-	0	+
f	1	$\frac{3}{4}$	1

2. D'après le tableau de variation, la fonction admet un minimum local pour $x = \frac{1}{2}$ de valeur $\frac{3}{4}$.

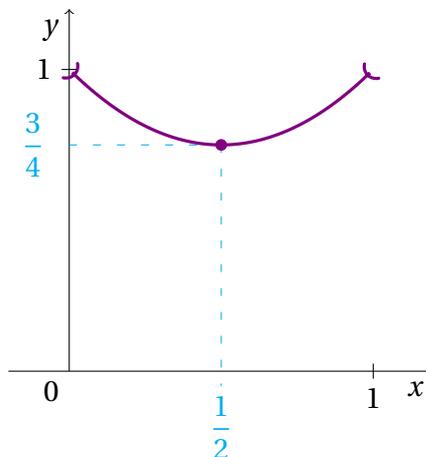
Et comme 0 et 1 ne sont pas dans l'ensemble de définition, la fonction n'admet pas de maximum local.

3. D'après le tableau de variation, pour tout $x \in]0, 1[$,

$$\frac{3}{4} \leq f(x) < 1.$$

En particulier, pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) \in]0, 1[$.

4. La fonction f est une fonction polynomiale de degré 2, sa courbe suit donc une portion de parabole :



Partie B

1. J'évalue la fonction en le terme précédent de la suite. Ainsi

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{9} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{7}{9} \quad \text{et} \quad u_2 = f(u_1) = f\left(\frac{7}{9}\right) = \frac{49}{81} + 1 - \frac{7}{9} = \frac{67}{81}.$$

2. Je raisonne par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$.

Énoncé : Je note \mathcal{P}_n la propriété : $u_n \in]0, 1[$.

Initialisation : Pour $n = 0$, $u_0 = \frac{1}{3}$ et $\frac{1}{3} \in]0, 1[$. Ainsi \mathcal{P}_0 est vraie.

Hérédité : Soit $n \geq 0$. Je suppose que \mathcal{P}_n est vraie et je montre que \mathcal{P}_{n+1} l'est aussi.

Par hypothèse de récurrence, je sais que $u_n \in]0, 1[$.

D'après la Partie A, je sais que pour tout $x \in]0, 1[$, $f(x) \in]0, 1[$. Alors

$$f(u_n) \in]0, 1[, \quad \text{i.e.} \quad u_{n+1} \in]0, 1[.$$

Finalement \mathcal{P}_{n+1} est vraie et la propriété est héréditaire.

Conclusion : Comme la propriété est vraie pour $n = 0$ et est héréditaire, alors par principe de récurrence, \mathcal{P}_n est vraie pour tout $n \geq 0$, i.e.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n \in]0, 1[.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}$. J'étudie le signe de $u_{n+1} - u_n$:

$$u_{n+1} - u_n = u_n^2 + 1 - u_n - u_n = u_n^2 + 1 - 2u_n = (u_n - 1)^2 \geq 0.$$

Ainsi $u_{n+1} \geq u_n$ et la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante.

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est croissante par la question précédente et majorée par 1 par la question d'avant, donc d'après le théorème de la limite monotone, la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge.

Je note ℓ sa limite. Puisque $u_{n+1} = u_n^2 + 1 - u_n$, alors en passant à la limite, j'obtiens que

$$\ell = \ell^2 + 1 - \ell \quad \iff \quad \ell^2 - 2\ell + 1 = 0 \quad \iff \quad (\ell - 1)^2 = 0.$$

Donc $\ell = 1$. Autrement dit,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} u_n = 1.$$

Exercice 12 –

1. Grâce aux valeurs données par l'énoncé,

$$P_{A_n}(A_{n+1}) = 1 - 0.3 = 0.7 \quad \text{et} \quad P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) = 0.2.$$

2. D'après la formule des probabilités totales, comme A_n et $\overline{A_n}$ forment un système complet d'événements, alors

$$\begin{aligned} P(A_{n+1}) &= P(A_n \cap A_{n+1}) + P(\overline{A_n} \cap A_{n+1}) = P(A_n) \times P_{A_n}(A_{n+1}) + P(\overline{A_n}) \times P_{\overline{A_n}}(A_{n+1}) \\ &= 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times P(\overline{A_n}) = 0.7 \times P(A_n) + 0.2 \times (1 - P(A_n)) \\ &= 0.7P(A_n) + 0.2 - 0.2P(A_n) = 0.5P(A_n) + 0.2. \end{aligned}$$

Autrement dit, avec les notations de l'énoncé, j'ai bien montré que $p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.

3. a) Pour montrer que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est géométrique, j'exprime u_{n+1} en fonction de u_n .
Soit $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_{n+1} = p_{n+1} - 0.4 = 0.5p_n + 0.2 - 0.4 = 0.5(u_n + 0.4) + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n + 0.2 + 0.2 - 0.4 = 0.5u_n.$$

Ainsi $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5. Son premier terme est donné par

$$u_1 = p_1 - 0.4 = 0.2 - 0.4 = -0.2.$$

- b) Comme $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique de raison $q = 0.5$ et de premier terme $u_1 = -0.2$, alors pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$u_n = u_1 \times q^{n-1} = -0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

Par conséquent, pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$,

$$p_n = u_n + 0.4 = 0.4 - 0.2 \times 0.5^{n-1}.$$

4. La suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite géométrique, de premier terme $u_1 = -0.2 < 0$ et de raison $q = 0.5 \in]0, 1[$. Donc la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est une suite croissante de termes négatifs. Comme pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, la suite $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ partage la même variation que la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$, elle est donc elle aussi croissante.

5. Pour les mêmes raisons que dans la question précédente, la limite de la suite géométrique $(u_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$ est 0. Alors comme $\forall n \in \mathbb{N}^*$, $p_n = u_n + 0.4$, j'en déduis que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} p_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} u_n + 0.4 = 0 + 0.4 = 0.4.$$

Exercice 13 –

1. Pour calculer le terme d'indice n , il suffit d'initialiser le terme u_0 dans une variable u puis d'utiliser une boucle `for` pour calculer les termes suivants :

```
1. def calculu(n):
2.     u=10
3.     for i in range(n):
4.         u=u/2+1/u
5.     return(u)
```

Pour afficher les dix premiers termes, il est possible de faire appel à cette fonction dix fois, mais le plus simple reste d'afficher les termes calculés successivement, en ajoutant une ligne `print(u)` à l'intérieur de la boucle `for`.

2. Je reste dans la boucle `while` tant que la distance entre le terme v_n et la limite e est plus grande qu'un paramètre d , *i.e.* $|e - v_n| > d$.
J'importe alors la bibliothèque `numpy` pour la valeur absolue et la constante e .

```
1. import numpy as np
2. def distance(d):
3.     n=1
4.     v=2
5.     while np.abs(np.e-v)>d:
6.         n=n+1
7.         v=(1+1/n)**n
8.     return(n)
9. print(distance(0.001))
```

3. J'utilise encore une boucle `while`, qui s'arrête quand le montant placé dépasse 40000 euros. En sortie, j'affiche le nombre d'itérations qui me donne le nombre d'années à attendre.

```
1. n=0
2. u=32000
3. while u<40000:
4.     n=n+1
5.     u=u*1.01
6. print(n)
```