CONCOURS BLANC 1

La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.
Les candidats sont invités à ***encadrer*** *dans la mesure du possible les résultats de leurs calculs.*
Les documents, la calculatrice et tout matériel électronique sont interdits.
Vous pouvez traiter le sujet dans l'ordre que vous souhaitez tant que le correcteur peut clairement identifier la question à laquelle vous répondez. Il est possible d'admettre le résultat d'une question précédente pour répondre à une question tant que cela est spécifié clairement.

Ce sujet comporte 5 pages et est constitué de 13 exercices. Bon courage!

Exercice 1 – Résoudre les équations et inéquations suivantes.

1. $2x-4=0$
2. $4(x-1)+3(2x-1)=0$
3. $x^2+2x+3=x(x-1)$
4. $x^2-7x+10=0$
5. $2x(x+1)=-1$
6. $x(x+1)-(4x-1)(x+3)=x^2-2x+1$
7. $-2x+3>0$
8. $-x^2+5x-6>0$
9. $2x(x-2)\leqslant x^2-4$
10. $\dfrac{1}{x+3}-\dfrac{2}{x-1}=0$
11. $\dfrac{x}{2x-4}+\dfrac{3}{-2x+1}\leqslant\dfrac{1}{2}$
12. $x^3-7x-6=0$
13. $-x^3+x^2+22x-40>0$

Exercice 2 –

1. Soit le polynôme $P(x)=3x^3-7x^2-7x+3$.
   a) Montrer que le polynôme $P(x)$ peut se factoriser sous la forme $P(x)=(x+1)Q(x)$ où $Q(x)$ est un polynôme de degré 2 à déterminer.
   b) Déterminer alors les solutions de l'équation $3x^3-7x^2-7x+3=0$.
2. Soit la fraction rationnelle $f(x)=\dfrac{3x^3-7x^2-7x+3}{3x^2-12x+12}$.
   a) Déterminer l'ensemble de définition de la fonction f.
   b) Résoudre l'inéquation $f(x)\geqslant 0$.

Exercice 3 – Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par

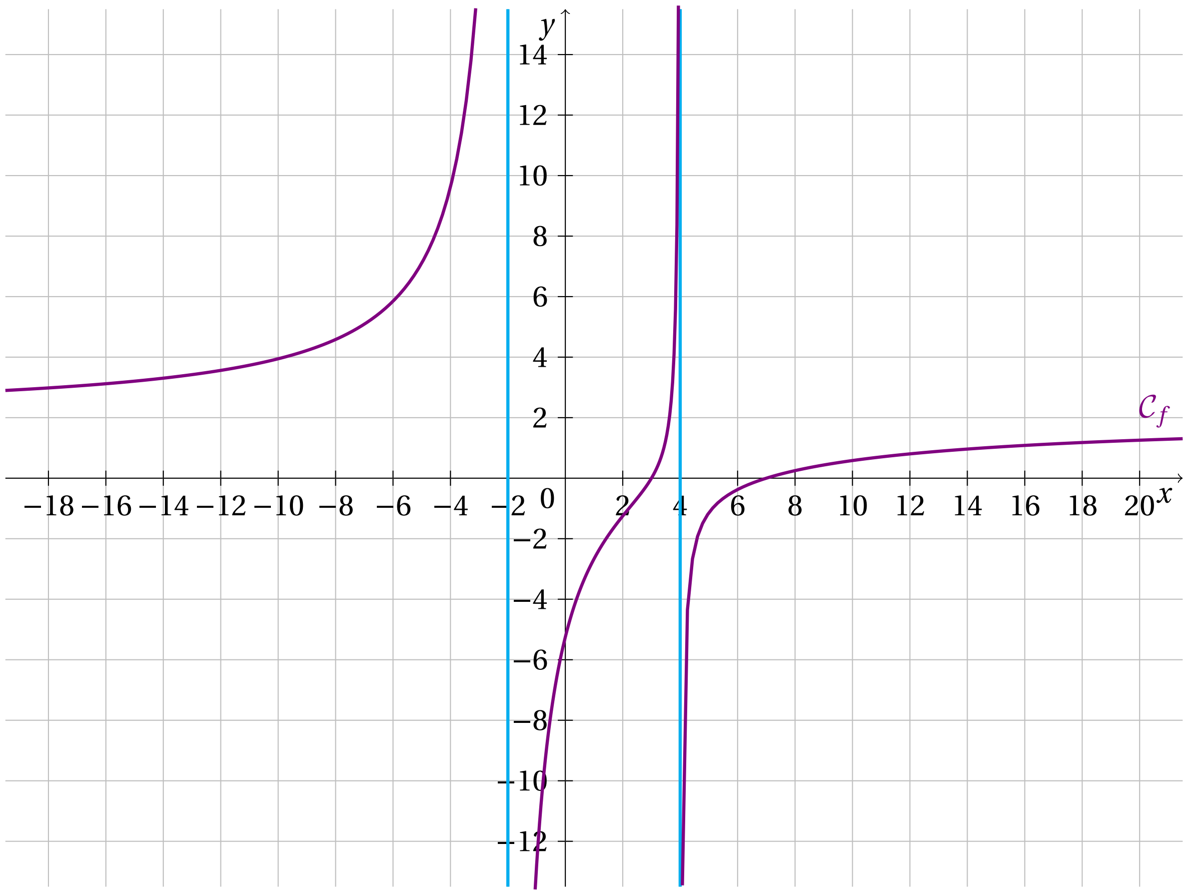
$$f(x)=x^3+6x^2-5x-5 \quad \text{et} \quad g(x)=2x^2+2x+5.$$

Soient $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f et $\mathcal{C}_g$ la courbe représentative de g.

1. Donner l'ensemble de définition des fonctions f et g ainsi que leurs limites en $+\infty$ et $-\infty$.
2. Montrer que le point A de coordonnées $(2,17)$ est un point de $\mathcal{C}_f$ et de $\mathcal{C}_g$.
3. En déduire qu'il existe un polynôme $Q(x)$ de degré 2 tel que $f(x)-g(x)=(x-2)Q(x)$.
4. Étudier alors le signe de $f(x)-g(x)$ et en déduire les positions relatives des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

Exercice 4 –

1. Soit f une fonction dont la courbe est donnée ci-dessous.



   a) Donner le tableau de variation ainsi que le tableau de signe de la fonction f.

   b) Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes (**TOUJOURS** en justifiant).

      (i) L'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution sur $\mathbb{R}$.

      (ii) La courbe $\mathcal{C}_f$ n'admet aucune asymptote horizontale.

      (iii) $\forall x \in \left]-2, 2\right], \quad f(x) \leqslant 0$.

      (iv) f est strictement croissante sur $\left]-2, +\infty\right[$.

2. Soit g une fonction dont le tableau de variation est donné ci-dessous.

x	$-\infty$	-3	-1	0	2	$+\infty$
g	3	0	4	$-\infty$ ‖ $+\infty$	-2	0

   a) Tracer une courbe susceptible de représenter la fonction g.

   b) Répondre par VRAI ou FAUX aux affirmations suivantes (**TOUJOURS** en justifiant).

      (i) L'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution sur $\left]-\infty, 0\right[$.

      (ii) La courbe $\mathcal{C}_g$ admet une asymptote verticale en 0.

      (iii) $\forall x \in \left[2, +\infty\right[, \quad g(x) \leqslant 0$.

      (iv) g est strictement décroissante sur $[3, 0]$.

Exercice 5 – Un particulier s'adresse à une société de crédit et emprunte 100 000 euros. Le taux mensuel de ce crédit est de 1%. Il est prévu dans le contrat un remboursement fixe, mensuel, égal à 2 000 euros, correspondant à une partie du remboursement du crédit et aux intérêts dûs chaque mois.
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 100\,000$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}$, u_n est la somme qu'il reste à rembourser à la fin du n-ième mois après l'emprunt.

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Justifier que, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1.01u_n - 2\,000$.
3. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout $n \in \mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 200\,000$.
   Montrer que $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique. Préciser sa raison et son premier terme.
4. Exprimer v_n puis u_n en fonction de n.
5. Calculer u_{69}. *(Indication numérique :* $1.01^{69} \approx 1.99$*)*
6. En déduire le temps qu'il faudra à cette personne pour rembourser totalement son emprunt. Préciser la somme qu'il lui faudra verser lors du dernier remboursement.

Exercice 6 – Une étude sur l'ensemble des personnes ayant exercé un emploi en France en 2023 a permis d'établir que

- 30% des personnes sont âgées de plus de 50 ans,
- 22.3% des personnes âgées de plus de 50 ans travaillent à temps partiel,
- 82.7% des personnes âgées de moins de 50 ans travaillent à temps plein.

On interroge au hasard une personne ayant occupé un emploi en 2023 et on note

- S l'événement : "la personne était âgée de plus de 50 ans",
- E l'événement : "la personne occupait un emploi à temps plein".

1. Donner les valeurs de
$$P(S), \quad P(\overline{S}), \quad P_S(E), \quad P_S(\overline{E}), \quad P_{\overline{S}}(E) \quad \text{et} \quad P_{\overline{S}}(\overline{E}).$$
2. Calculer $P(S \cap \overline{E})$ et interpréter le résultat.
3. Montrer que la probabilité qu'une personne occupe en 2023 un emploi à temps partiel est égale à 0.188.
4. La personne interrogée occupait un emploi à temps partiel. Quelle est la probabilité qu'elle ait été âgée de plus de 50 ans ?

Exercice 7 – Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 2$ et pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = 2u_n + 4$.
Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n > 0$.

Exercice 8 –

1. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,
$$\sum_{k=1}^{n} 2^k = 2(2^n - 1).$$
2. Redémontrer cette égalité en utilisant cette fois la formule donnant la somme des premiers termes d'une suite géométrique.

Exercice 9 – Calculer les limites suivantes.

1. $\lim\limits_{x\to-2} 2x^3 - x^2 + 5x + 6$
2. $\lim\limits_{x\to-1} \dfrac{x-2}{2x-3}$
3. $\lim\limits_{x\to2^-} \dfrac{2x-1}{-2x+4}$
4. $\lim\limits_{x\to0^+} \dfrac{3x-1}{x(x+1)}$
5. $\lim\limits_{x\to+\infty} 2 - \dfrac{1}{x} + \dfrac{3}{2x^2}$
6. $\lim\limits_{x\to+\infty} -x^3 + 5x^2 + 4x - 7$
7. $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2-2x+1}{-4x^3+2x-5}$
8. $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(-2x^2+1\right) \times \dfrac{2x+1}{x+5}$
9. $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{\dfrac{3}{x}+16}$
10. $\lim\limits_{x\to2^+} \left(\sqrt{\dfrac{-3}{-x+2}} - 2\right)^3$

Exercice 10 – Soient f la fonction définie par la formule suivante et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

$$f(x) = \frac{x^2-2x+1}{2x-4}$$

1. a) Déterminer l'ensemble de définition de f.
   b) Calculer les limites de f en $-\infty$, 2^-, 2^+ et $+\infty$. Interpréter graphiquement les résultats.
   c) Déterminer les réels a, b et c tels que $f(x) = ax + b + \dfrac{c}{2x-4}$. En déduire que, au voisinage de $+\infty$, la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = \dfrac{x}{2}$ est asymptote oblique à la courbe $\mathcal{C}_f$.
2. a) Calculer $f'(x)$.
   b) Étudier les variations de f.
   c) Déterminer l'équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
3. Tracer sur un même graphique l'allure de la courbe $\mathcal{C}_f$ ainsi que la tangente $\mathcal{T}$.

Exercice 11 –

Partie A

Soit f la fonction définie sur $]0,1[$ par

$$f(x) = x^2 + 1 - x.$$

1. Calculer $f'(x)$. En déduire le tableau de variation de f.
2. La fonction f admet-elle un minimum local ? un maximum local ?
3. À l'aide du tableau de variation de f, montrer que si $x \in]0,1[$, alors $f(x) \in]0,1[$.
4. Tracer l'allure de la courbe représentative de f.

Partie B

Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par

$$u_0 = \frac{1}{3} \quad \text{et} \quad u_{n+1} = f(u_n).$$

1. Calculer u_1 et u_2.
2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \in]0,1[$.
   (Indication : On pourra utiliser le résultat d'une question de la Partie A.)
3. Étudier le sens de variation de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente, puis déterminer sa limite.

Exercice 12 – Pour l'année scolaire, un professeur de mathématiques propose aux élèves de sa classe le choix entre deux types d'accompagnement : *Approfondissement* ou *Remédiation.*
Chaque semaine, un élève doit s'inscrire dans un et un seul des deux accompagnements proposés.
La première semaine, 20% des élèves de la classe ont choisi *Approfondissement* et tous les autres ont choisi *Remédiation.* On admet que

- 20% des élèves ayant choisi *Remédiation* une certaine semaine s'inscrivent en *Approfondissement* la semaine suivante,
- 30% des élèves ayant choisi *Approfondissement* une certaine semaine s'inscrivent en *Remédiation* la semaine suivante.

On s'intéresse à l'évolution de la répartition des élèves de cette classe entre les deux types d'accompagnement au fil des semaines. Chaque semaine, on interroge au hasard un élève de la classe.
Pour tout entier naturel n non nul, on note A_n l'événement : "l'élève a choisi *Approfondissement* la n-ième semaine" et p_n la probabilité de l'événement A_n. On a alors $p_1 = 0.2$.

1. Donner les valeurs de $P_{A_n}(A_{n+1})$ et $P_{\overline{A_n}}(A_{n+1})$.
2. Montrer que, pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$, $\quad p_{n+1} = 0.5p_n + 0.2$.
3. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\quad u_n = p_n - 0.4$.
   a) Démontrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique de raison 0.5 et préciser la valeur de son premier terme u_1.
   b) En déduire pour tout entier naturel $n \in \mathbb{N}^*$ l'expression de u_n en fonction de n, puis l'expression de p_n en fonction de n.
4. Étudier le sens de variation de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
5. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 13 –

1. Écrire une fonction Python qui calcule et affiche, pour un entier n donné, le terme d'indice n de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 10$ et $u_{n+1} = \dfrac{u_n}{2} + \dfrac{1}{u_n}$.
   Expliquer comment afficher les dix premiers termes ?
2. Soit $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie pour tout $n \geqslant 1$ par $v_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$. En sachant que cette suite admet la constante e (≈ 2.718) pour limite, compléter le programme Python suivant permettant de calculer le rang du premier terme de la suite se trouvant à une distance inférieure à 0.001 de la limite.

```
import ... ... ...
def distance(...):
    n=1
    v=2
    while ...... :
        n=...
        v=...
    return(n)
print(distance(0.001))
```

3. 32 000 euros sont placés sur un compte rémunéré à un taux annuel de 1%.
   Écrire un programme Python permettant de savoir au bout de combien d'années le montant placé sur ce compte dépassera 40 000 euros.