DEVOIR MAISON 3

Exercice 1 – Un professeur interroge ses élèves en posant une liste de vingt questions. Pour chaque question, il y a trois réponses possibles, une seule étant la bonne réponse. L'élève A répond au questionnaire. On suppose que :

- L'élève A ne connaît que 60% de son cours, c'est-à-dire que pour chaque question, la probabilité qu'il connaisse la réponse est $\frac{60}{100}$.
- Lorsqu'il ne connaît pas une réponse à une question, il répond au hasard.
- Les questions posées sont mutuellement indépendantes.

On considère les événements

- R : "l'élève A connaît la réponse à la première question",
- J : "l'élève A répond juste [1] à la première question".

1. Montrer en utilisant la formule des probabilités totales que $P(J) = \frac{11}{15}$.

Soit X la variable aléatoire égale au nombre de réponses exactes données par l'élève aux vingt questions.

2. Reconnaître la loi de X. On donnera les valeurs prises par X et, pour chacune de ces valeurs k, la valeur de $P(X = k)$.
3. Donner $E(X)$ et $V(X)$, l'espérance et la variance de X.
4. Pour sanctionner les choix faits au hasard, le professeur décide d'accorder un point par réponse exacte et de retirer deux points par réponse fausse.
   Soit N la variable aléatoire égale à la note obtenue par l'élève A.
   a) Justifier l'égalité $N = 3X - 40$.
   b) En déduire l'espérance de N ainsi que sa variance.

L'élève B répond lui aussi au questionnaire. On suppose que comme l'élève A, il ne connaît que 60% de son cours. Mais il choisit de ne répondre qu'aux questions dont il connaît la réponse.

5. Soit Y la variable aléatoire égale au nombre de bonnes réponses de l'élève B.
   a) Déterminer la loi de Y.
   b) En déduire la note que l'élève B obtient en moyenne.
   c) En moyenne, entre l'élève A et l'élève B, quelle est la meilleure stratégie pour obtenir une bonne note ?

1. "juste" comme "correct", pas comme "uniquement".

Exercice 2 –

Partie A

1. Justifier que l'équation $x^2 + x + 1 = 0$, d'inconnue réelle x, n'admet aucune solution.

On considère alors la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{x}{1+x+x^2}.$$

On note $\mathcal{C}_f$ la courbe représentative de f.

2. Déterminer les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$.
3. Dresser, en le justifiant, le tableau de variation de f.
   On remarquera en particulier que f est croissante sur l'intervalle $[-1, 1]$.
4. a) Déterminer une équation de la tangente $\mathcal{T}$ à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0.
   b) Montrer que pour tout réel x de $[-1, +\infty[$, on a $f(x) \leqslant x$.
   Donner une interprétation graphique de ce résultat.
5. Tracer l'allure de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{T}$ dans un repère orthonormé.
   On soignera en particulier la position de $\mathcal{C}_f$ par rapport à $\mathcal{T}$.

Partie B

On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$u_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_{n+1} = f(u_n) = \frac{u_n}{1+u_n+u_n^2}.$$

1. Vérifier que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{n+1+\frac{1}{n}}.$$

   En déduire que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad f\left(\frac{1}{n}\right) \leqslant \frac{1}{n+1}.$$

2. Montrer, en raisonnant par récurrence, que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad 0 \leqslant u_n \leqslant \frac{1}{n}.$$

3. En déduire la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et préciser sa limite.
4. Recopier et compléter le script du programme `Python` suivant, pour qu'il affiche le plus petit entier naturel non nul n tel que $u_n \leqslant 1/1000$.

```
def f(x):
    return x/(1+x+x**2)
u=......
n=......
while u...... :
    u=......
    n=......
print(......)
```

Partie C

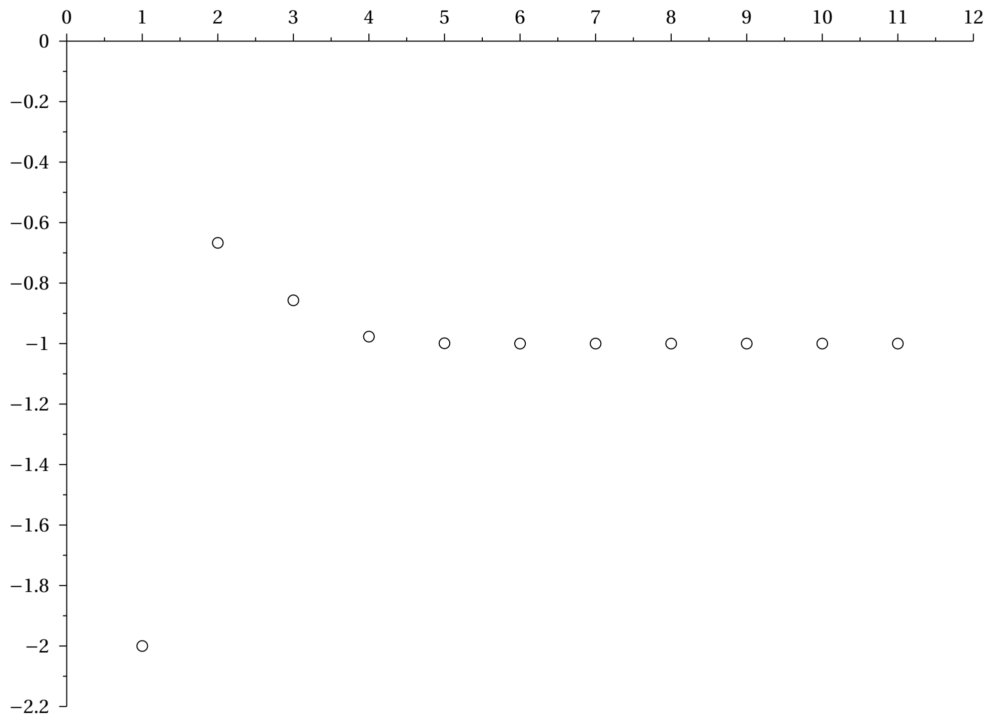
On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$v_1 = -2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_{n+1} = f(v_n) = \frac{v_n}{1 + v_n + v_n^2}.$$

1. En utilisant la question **3.** de la Partie A, démontrer par récurrence que

$$\forall n \geqslant 2, \quad -1 \leqslant v_n \leqslant 0.$$

2. En utilisant la question **4.** de la Partie A, montrer que la suite $(v_n)_{n\geqslant 2}$ est décroissante.
3. En déduire la convergence de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.
4. À l'aide de `Python`, on trace les premiers termes de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et on obtient la figure ci-dessous. Conjecturer alors la limite de la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.



5. a) Résoudre l'équation $f(x) = -1$, d'inconnue réelle x.

   b) Montrer par l'absurde que

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad v_n \neq -1.$$